臺北區 110 學年度第一學期第二次學科能力測驗
數學 A(110-B2)

RA499

第壹部分：選擇題(占 85 分)

一、單選題(占 25 分)

1. 為便於國際比較，指揮中心同時公布疫苗「接種人口涵蓋率」和「劑次人口比」數據，「接種人口涵蓋率」的算法是第一劑疫苗接種人數除以全國人口數；「劑次人口比」則是第一劑、第二劑疫苗接種人數加總後除以全國人口數，通用指標為「每 100 人接種劑數」。某地區目前人口數 2400 萬人，疫苗「接種人口涵蓋率」為 35%，「劑次人口比」為每 100 人 40 劑。若想在 30 天內達成「接種人口涵蓋率」為 60%的目標，則平均每天第一劑疫苗接種之施打量為多少萬劑？
(1) 24　(2) 20　(3) 16　(4) 12　(5) 8

2. 某百貨公司週年慶為吸引消費者，舉辦百元禮券大放送的活動。禮券發放規則為百貨業者準備 1 顆不公正的骰子，骰子出現 k 點的機率為 $\dfrac{k}{n}$ (k=1, 2, 3, 4, 5, 6)，每投擲一次，若出現 k 點可得 $7-k$ 張禮券，一位消費者可連投 3 次，試求消費者所得禮券張數的期望值為多少張？　(1) 4 張　(2) 6 張　(3) 8 張　(4) 10 張　(5) 12 張

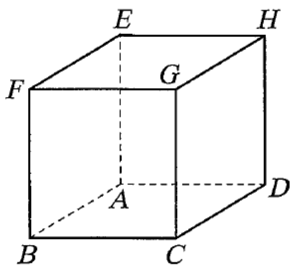
3. 在坐標平面上，已知 $|\overrightarrow{AB}|=3, |\overrightarrow{AC}|=5$，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的夾角為 60°，則由 $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ 兩向量所張成的平行四邊形面積為何？
(1) $\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$　(2) $75\sqrt{3}$　(3) $105\sqrt{3}$　(4) $\dfrac{105\sqrt{3}}{2}$　(5) $\dfrac{105\sqrt{3}}{4}$

4. 已知方程組 $\begin{cases} ax+by=3 \\ cx+dy=5 \end{cases}$ 的解 $(x,y)=(1,7)$，若方程組 $\begin{cases} ex+fy=1 \\ gx+hy=7 \end{cases}$ 的解 $(x,y)=(m,n)$，且 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$，則 $m-n$ 之值為下列何者？
(1) 44　(2) 11　(3) 6　(4) -3　(5) -22

5. 甲，乙，丙三位好友經常相約聚餐，每次的餐費都採取擲硬幣決定何人付費。付費規則為甲，乙，丙三人各擲一枚均勻的硬幣，若某人出現的正、反面與另外兩人不同時，則必須負責支付三人該次的餐費總額；若三人皆擲出相同面，則再各自擲一次硬幣，每次投擲結果互不影響；若連續 3 次仍無法決定何人付費，則該次餐費便採取各自付費。某次用餐，三人所點的餐皆為 320 元，請問該次聚餐甲無須付費的機率為何？
(1) $\dfrac{2}{3}$　(2) $\dfrac{11}{16}$　(3) $\dfrac{21}{32}$　(4) $\dfrac{11}{32}$　(5) $\dfrac{21}{64}$

二、多選題(占 25 分)

6. 坐標空間中一正立方體 $ABCD$—$EFGH$ 如右圖所示。已知 $t>0$，其中四個頂點的坐標為 $A(0,0,0)$、$B(t,0,0)$、$D(0,t,0)$、$E(0,0,t)$、$P(a,b,c)$ 為正立方體內一點。若 $\overline{PA}=\sqrt{2}$，$\overline{PB}=\overline{PD}=\sqrt{3}$，$\overline{PE}=1$，請選出正確的選項。



(1) P 點落在 $\overline{BD}$ 的垂直平分面上　(2) $c=2a$
(3) 正立方體的體積為 9　(4) $\cos\angle PAB=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$
(5) P 點與直線 BD 的距離為 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

7. 若$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 74 & 212 \\ 36 & 212 & 656 \end{bmatrix}$，請選出正確的選項。

(1) a，b，c，d的算術平均數為$\dfrac{43}{2}$　(2) a，b，c，d的標準差為$\sqrt{\dfrac{77}{2}}$

(3) $a^3+b^3=468$　(4) 若$\overrightarrow{u}=(a,d)$，$\overrightarrow{v}=(c,b)$，則$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=656$

(5) 若$\overrightarrow{OA}=(a,b)$，$\overrightarrow{OB}=(-d,c)$，則$\triangle OAB$的面積為 212

8. 臺北市某紅茶店的店長隨機選了 5 天記錄當日最高氣溫(攝氏)和紅茶的銷售金額(千元)，如下表所示。

最高氣溫(攝氏 X 度)	32	29	35	36	33
銷售金額(臺幣 Y 千元)	86	74	100	109	81

店長為提供資料給想開加盟店的美國好友，將攝氏溫度(X 度)及臺幣(Y 千元)分別轉換成華氏溫度(U 度)及美元(V 千美元)，其中華氏溫度＝$\dfrac{9}{5}$(攝氏溫度)＋32；1 美元以 30 元臺幣計算。令 X，Y 兩者的相關係數為r_1，Y 對 X 的最適直線斜率為m_1。轉換後，U，V 兩者的相關係數為r_2，V 對 U 的最適直線斜率為m_2，請選出正確的選項。

(1) $r_1>0.6$　(2) $r_1=r_2$　(3) $m_1<m_2$

(4) Y 對 X 的最適直線通過點$(33,81)$　(5) V 對 U 的最適直線通過點$(91.4,3)$

9. 空間中有兩條直線$L_1:\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-3}{a}=\dfrac{z-8}{6}$，$L_2:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z}{b}$，其方向向量分別為$\overrightarrow{l_1}=(3,a,6)$，$\overrightarrow{l_2}=(2,3,b)$，請選出正確的選項。

(1) 若$L_1//L_2$，則$a=\dfrac{9}{2},b=9$　(2) 若$L_1//L_2$，則L_1，L_2兩直線距離為$\sqrt{66}$

(3) 若$a=6,b=2$，則存在一平面同時包含L_1，L_2

(4) 若$a=6,b=2$，則L_1，L_2兩直線距離為 4

(5) 若有一正四面體的兩個不相交稜邊分別在L_1，L_2上，則$|\overrightarrow{l_1}|^2+|\overrightarrow{l_2}|^2$的最小值為$\dfrac{294}{5}$

10. 有一個玩牌拿獎金遊戲，其規則如下：莊家與玩家各拿一副分別寫有數字 1、2、3、4、5 的五張牌，然後莊家與玩家各自從自己的五張牌中隨機拿出一張牌出來，每張牌被取出的機會相等。若拿出來的兩張牌數字和為奇數，則玩家可獲得該數字和的 100 倍獎金，若數字和為偶數，則玩家須給莊家 600 元，請選出正確的選項。

(1) 玩家玩一次能獲得獎金的機率為$\dfrac{6}{25}$　(2) 玩家玩一次的所得金額期望值為 24 元

(3) 若玩家連續玩兩次，則最終結算金額大於 0 元的機率為$\dfrac{12}{25}$

(4) 若玩家連續玩兩次，則最終結算金額超過 1000 元的機率為$\dfrac{72}{625}$

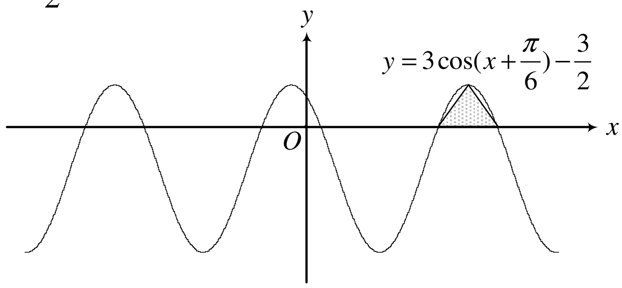
(5) 若玩家連續玩兩次且最終結算金額大於 0 元，則其最終結算金額超過 1000 元的機率為$\dfrac{6}{25}$

三、選填題(占 35 分)

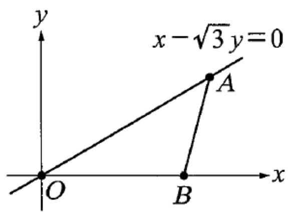
11.已知一奈米為10^{-9}公尺，某病毒的直徑為 x 公尺，且 $\log x=-7.2219$，若此病毒的直徑為 y 奈米，則 y 最接近的整數為__________。

12.$\triangle ABC$ 的重心為 P 點，過 P 作一直線分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 Q、R 兩點，若 $\overrightarrow{AQ}=a\overrightarrow{AB}$ ，$\overrightarrow{AR}=\dfrac{3a}{2}\overrightarrow{AC}$ ，則 a=__________。(化為最簡分數)

13.若右圖為訊號產生器產出的波 $y=3\cos(x+\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{3}{2}$ ，則右圖中著色三角形的面積為________π。(化為最簡分數)

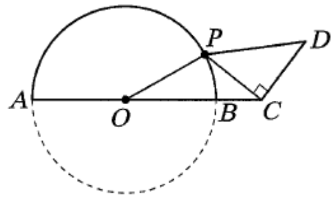


14.在坐標平面上第一象限有一點 A 在直線 $x-\sqrt{3}y=0$ 上，另一點 B 在 x 軸的正向上，如右圖所示。已知 $\overline{AB}=4$ ，O 為原點，試求$\triangle OAB$ 面積最大值為__________。(化為最簡根式)

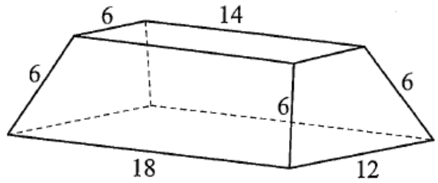


15.農夫有一塊正方形的田地，已知該田地的四個邊界剛好各有一口水井，而且都不是在正方形的頂點上；若將該田地坐標化且選取一定點為原點後，則四口水井的坐標依順時針方向分別為 $(0,8)$ 、 $(9,2)$ 、 $(6,0)$ 、 $(-5,4)$ ，試問滿足該四口水井位置的最大田地面積為__________平方單位。

16.如右圖，O 為圓心，圓的直徑 $\overline{AB}=4$ ，C 在 $\overrightarrow{AB}$ 射線上，$\overline{BC}=1$ P 為上半圓上的動點，$\triangle PCD$ 為等腰直角三角形，$\angle PCD=90^\circ$ O，D 在 $\overline{PC}$ 異側，試求四邊形 $OCDP$ 面積的最大值為__________。(化為最簡分數及最簡根式)



17.有一個搭好的帳篷由上方一個長方形，側面四個梯形組成，其中四個梯形皆為等腰梯形，且對面的梯形全等。上方的長方形長 14 公分，寬 6 公分，側面的等腰梯形分別為上底 14 公分、下底 18 公分、腰長 6 公分，上底 6 分、下底 12 分、腰長 6 公分。設兩相鄰梯形所夾的兩面角為θ，試求$|\cos\theta|=$____________。(化為最簡根式)



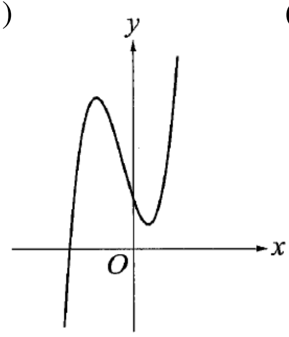
第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-19 題為題組

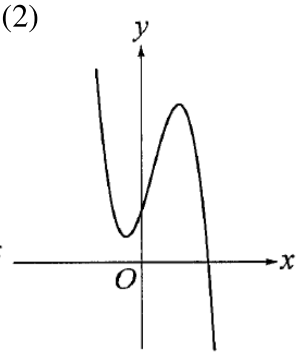
令 $f(x)=2x^3+ax^2-2ax+5$，試回答下列問題：

18.下列哪個選項為 $y=f(x)$ 可能的圖形？(單選題，3 分)

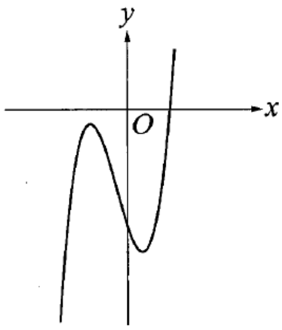
(1)



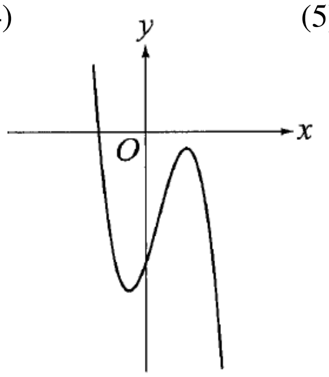
(2)



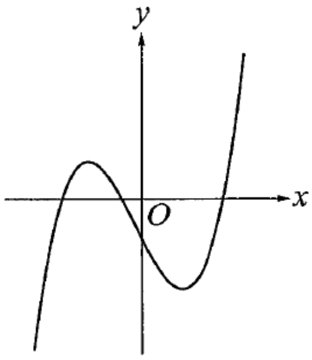
(3)



(4)



(5)



19. $f(x)$ 除以 $x(x-2)$ 的餘式為何？(非選擇題，6 分)

20. $y=f(x)$ 的圖形向左平移 1 單位，向下平移 1 單位後會通過原點，若 $y=f(x)$ 的圖形在點 $(1,f(1))$ 附近的一次近似函數為 $g(x)$，則 $g(0.99)=$？ (四捨五入至小數點後第一位)
(非選擇題，6 分)

RA499　臺北區 110 學年度第一學期第二次學科能力測驗數學 A(110-B2)

參考答案

選擇題：**1.** (2)　**2.** (3)　**3.** (4)　**4.** (2)　**5.** (3)　**6.** (1)(2)(4)(5)　**7.** (2)(3)　**8.** (1)(2)(5)　**9.** (4)(5)　**10.** (3)

選填題：**11.** 60　**12.** $\frac{5}{9}$　**13.** $\frac{1}{2}$　**14.** $8+4\sqrt{3}$　**15.** 100　**16.** $3\sqrt{5}+\frac{13}{2}$　**17.** $\frac{\sqrt{6}}{12}$

混合題：**18.** (1)　**19.** $8x+5$　**20.** 0.9