

數學 A 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(3)	(4)	(2)	(3)	(1)(2)(4)(5)	(2)(3)
8.	9.	10.				
(1)(2)(5)	(4)(5)	(3)				

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. (2)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：一維數據分析

解析：某地區目前疫苗「接種人口涵蓋率」為 35%

$$\Rightarrow \frac{\text{第一劑疫苗接種人數}}{2400 \text{ 萬}} = 35\%$$

$$\Rightarrow \text{第一劑疫苗接種人數} = 2400 \text{ 萬} \times 35\% = 840 \text{ 萬(人)}$$

30 天內達成「接種人口涵蓋率」為 60%

$$\Rightarrow \frac{\text{第一劑疫苗接種人數}}{2400 \text{ 萬}} = 60\%$$

$$\Rightarrow \text{第一劑疫苗接種人數} = 2400 \text{ 萬} \times 60\% = 1440 \text{ 萬(人)}$$

則平均每天第一劑疫苗接種之施打量為

$$\frac{1440 - 840}{30} = \frac{600}{30} = 20 \text{ 萬劑}$$

故選(2)。

2. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：期望值計算

解析：機率總和為 $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \frac{4}{n} + \frac{5}{n} + \frac{6}{n} = 1 \Rightarrow n = 21$

k	1	2	3	4	5	6
機率	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$
$7-k$	6	5	4	3	2	1

每投擲 1 次的期望值為

$$\frac{1}{21} \times 6 + \frac{2}{21} \times 5 + \frac{3}{21} \times 4 + \frac{4}{21} \times 3 + \frac{5}{21} \times 2 + \frac{6}{21} \times 1 = \frac{56}{21} = \frac{8}{3} \text{ (張)}$$

$$\text{連投 3 次的期望值為 } 3 \times \frac{8}{3} = 8 \text{ (張)}$$

故選(3)。

3. (4)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：面積與二階行列式

解析： \vec{AB} ， \vec{AC} 兩向量所張成的平行四邊形面積為

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} \vec{AB} \\ \vec{AC} \end{array} \right| &= |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin 60^\circ \\ &= 3 \times 5 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$2\vec{AB} + 3\vec{AC}$ ， $\vec{AB} - 2\vec{AC}$ 兩向量所張成的平行四邊形面積為

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} 2\vec{AB} + 3\vec{AC} \\ \vec{AB} - 2\vec{AC} \end{array} \right| &\stackrel{\times(-2)}{\leftarrow} = \left| \begin{array}{c} 7\vec{AC} \\ \vec{AB} - 2\vec{AC} \end{array} \right| \\ &= 7 \left| \begin{array}{c} \vec{AC} \\ \vec{AB} - 2\vec{AC} \end{array} \right| \stackrel{\times 2}{\leftarrow} = 7 \left| \begin{array}{c} \vec{AC} \\ \vec{AB} \end{array} \right| = 7 \left| \begin{array}{c} \vec{AB} \\ \vec{AC} \end{array} \right| \\ &= 7 \times \frac{15\sqrt{3}}{2} = \frac{105\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

故選(4)。

[另解]

由 $|\vec{AB}| = 3$ ， $|\vec{AC}| = 5$ ， \vec{AB} 與 \vec{AC} 的夾角為 60°

$$\text{可令 } \vec{AB} = (3, 0), \vec{AC} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{則 } 2\vec{AB} + 3\vec{AC} = \left(\frac{27}{2}, \frac{15\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\vec{AB} - 2\vec{AC} = (-2, -5\sqrt{3})$$

以坐標數據進行二階行列式運算

故選(4)。

4. (2)

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：用乘法反方陣解線性方程組

解析：因為 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ，且 $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -13 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow m - n = \frac{9}{2} - \left(-\frac{13}{2} \right) = 11$$

故選(2)。

5. (3)

出處：第四冊〈機率〉

目標：獨立事件

解析：每擲一次均勻的硬幣，由三人中的其中 1 人付費與無

法分出結果的機率皆為 $\frac{1}{4}$

若只擲 1 次硬幣，甲無須付費的機率為 $\frac{1}{2}$

若只擲 2 次硬幣，甲無須付費的機率為 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

若擲 3 次硬幣，甲無須付費的機率為 $\left(\frac{1}{4} \right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

故此次用餐甲無須付費的機率為 $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{21}{32}$

故選(3)。

二、多選題

6. (1)(2)(4)(5)

出處：第四冊〈空間向量〉、

第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：三元一次聯立方程式、空間向量

解析：(1) $\because \overline{PB} = \overline{PD} = \sqrt{3}$

$\therefore P$ 點會落在 \overline{BD} 的垂直平分面 $x-y=0$ 上

(2) $\because A(0, 0, 0), B(t, 0, 0), D(0, t, 0),$

$E(0, 0, t)$

由 $\overline{PA} = \sqrt{2}, \overline{PB} = \overline{PD} = \sqrt{3}, \overline{PE} = 1$, 可得

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2 \\ (a-t)^2 + b^2 + c^2 = 3 \\ a^2 + (b-t)^2 + c^2 = 3 \\ a^2 + b^2 + (c-t)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{t^2-1}{2t}, b = \frac{t^2-1}{2t}, c = \frac{t^2+1}{2t}$$

代入 $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, 得 $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AG} = \sqrt{3}t$ 且 $\overline{AG} > \overline{PA}$

$$\therefore t = \sqrt{3} \text{ 與 } (a, b, c) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

故 $c = 2a$

(3) \times : 正立方體的體積為 $t^3 = 3\sqrt{3}$

$$(4) \circ : \cos \angle PAB = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AP}^2 - \overline{PB}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{AP}} = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

[另解]

$$\begin{aligned} \cos \angle PAB &= \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AB}|} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \cdot (\sqrt{3}, 0, 0)}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

(5) $\circ : \because \overline{PB} = \overline{PD} = \sqrt{3}$

$\therefore \triangle PBD$ 是等腰三角形, 且 $\overline{BD} = \sqrt{6}$

P 點與直線 BD 的距離為 P 點與線段 BD 中點

的連線段長 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

故選(1)(2)(4)(5)。

7. (2)(3)

出處：第一冊〈數與式〉、第二冊〈數據分析〉、
第三冊〈平面向量〉、第四冊〈矩陣〉

目標：乘法公式、算術平均數、標準差、面積與二階行列式、
內積

解析：根據矩陣乘法我們得到

$$\begin{cases} a+b=12 \\ c+d=36 \\ a^2+b^2=74 \\ ac+bd=212 \\ c^2+d^2=656 \end{cases}$$

(1) \times : a, b, c, d 的算術平均數為

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{12+36}{4} = 12$$

(2) \circ : a, b, c, d 的標準差為

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - 12^2} &= \sqrt{\frac{74+656}{4} - 144} \\ &= \sqrt{\frac{77}{2}} \end{aligned}$$

$$(3) \circ : (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 12^2 = 74 + 2ab \Rightarrow ab = 35$$

$$\begin{aligned} \text{則 } a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ &= 12 \times (74 - 35) = 468 \end{aligned}$$

$$(4) \times : \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ac + bd = 212$$

(5) \times : $\triangle OAB$ 的面積為

$$\frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |ac + bd| = 106$$

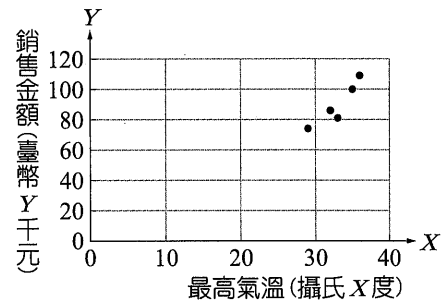
故選(2)(3)。

8. (1)(2)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：二維數據分析

解析：(1) \circ : 利用散布圖判斷, 兩組變數呈高度正相關



$$(2) \circ : U = \frac{9}{5}X + 32, V = \frac{1}{30}Y$$

$$\therefore \frac{9}{5} \text{ 與 } \frac{1}{30} \text{ 同號 } \therefore r_1 = r_2$$

$$(3) \times : m_1 = r_1 \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, m_2 = r_2 \cdot \frac{\sigma_V}{\sigma_U}$$

$$\therefore r_1 = r_2, \sigma_V = \frac{1}{30} \sigma_Y, \sigma_U = \frac{9}{5} \sigma_X$$

$$\therefore \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{54}, \text{ 故 } m_2 < m_1$$

(4) \times : Y 對 X 的最適直線通過點 $(\mu_X, \mu_Y) = (33, 90)$,
因此 $(33, 81)$ 不在直線上

(5) \circ : V 對 U 的最適直線通過點 (μ_U, μ_V) , 其中

$$\mu_U = \frac{9}{5} \times 33 + 32 = 91.4, \mu_V = \frac{1}{30} \times 90 = 3$$

故選(1)(2)(5)。

9. (4)(5)

出處：第四冊〈空間向量〉、

第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：空間中兩直線的關係

解析：(1) \times : $(3, a, 6) \parallel (2, 3, b)$ 時, 得 $a = \frac{9}{2}, b = 4$

(2) \times : 點 $(7, 3, 8)$ 與點 $(6, 4, 0)$ 距離為 $\sqrt{66}$
但兩點連線與向量 $(2, 3, 4)$ 並不垂直

(3) \times : 此時 L_1 與 L_2 互為歪斜線

(4) \circ : $(3, 6, 6)$ 與 $(2, 3, 2)$ 有一公垂向量 $(2, -2, 1)$
則包含 L_1 且與 L_2 平行的平面為 $2x - 2y + z = 16$
而點 $(6, 4, 0)$ 與此平面的距離為 4

(5) ○：若正四面體的兩個不相交稜邊分別在 L_1, L_2 上

$$\Rightarrow \vec{l}_1 \perp \vec{l}_2 \Rightarrow \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = 6 + 3a + 6b = 0$$

$$\Rightarrow a + 2b = -2$$

$$|\vec{l}_1|^2 + |\vec{l}_2|^2$$

$$= (\sqrt{3^2 + a^2 + 6^2})^2 + (\sqrt{2^2 + 3^2 + b^2})^2$$

$$= a^2 + b^2 + 58$$

已知乘積和求平方和最小 \Rightarrow 利用柯西不等式

$$(a^2 + b^2)(1^2 + 2^2) \geq (a + 2b)^2 = (-2)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5} \Rightarrow |\vec{l}_1|^2 + |\vec{l}_2|^2 \geq \frac{4}{5} + 58 = \frac{294}{5}$$

故選(4)(5)。

10. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈機率〉

目標：期望值的計算

解析：(1) ×：玩一次能獲得獎金，則兩張牌數字和為奇數，

即(奇, 偶)或(偶, 奇)

$$\text{所求機率為 } \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$$

(2) ×：玩一次獲得獎金的金額與機率如下表

獎金 金額	300 元	500 元	700 元	900 元
數字和 種類	(1, 2), (2, 1)	(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)	(2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)	(4, 5), (5, 4)
機率	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$

所以玩一次獲得獎金的期望值為

$$\frac{2}{25} \times 300 + \frac{4}{25} \times 500 + \frac{4}{25} \times 700 + \frac{2}{25} \times 900$$

$$- \frac{13}{25} \times 600 = -24 \text{ (元)}$$

(3) ○：連續玩兩次且最終結算金額大於 0 元，則可能(兩次都獲得獎金)或(一次得 700 元或 900 元另一次賠 600 元)

所求機率為

$$\frac{12}{25} \times \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} \times \frac{13}{25} + 2 \times \frac{2}{25} \times \frac{13}{25} = \frac{12}{25}$$

(4) ×：連續玩兩次且最終結算金額超過 1000 元，則有(300, 900), (500, 700), (500, 900), (700, 700), (700, 900), (900, 900) 六種可能

所求機率為

$$2 \times \frac{2}{25} \times \frac{2}{25} + 2 \times \frac{4}{25} \times \frac{4}{25} + 2 \times \frac{4}{25} \times \frac{2}{25}$$

$$+ \frac{4}{25} \times \frac{4}{25} + 2 \times \frac{4}{25} \times \frac{2}{25} + \frac{2}{25} \times \frac{2}{25} = \frac{92}{625}$$

(5) ×：所求為條件機率，由(3)、(4)的結果得機率為

$$\frac{\frac{92}{625}}{\frac{12}{25}} = \frac{23}{75}$$

故選(3)。

三、選填題

11. 60

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：對數與科學記號的轉換

解析：因為 $\log x = -7.2219 = -8 + 0.7781$

$$= \log 10^{-8} + 0.3010 + 0.4771$$

$$\approx \log 10^{-8} + \log 2 + \log 3 = \log (6 \times 10^{-8})$$

所以 $x \approx 6 \times 10^{-8} = 60 \times 10^{-9}$ ，因此該病毒的直徑最接近的整數為 60 奈米。

12. $\frac{5}{9}$

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量的線性組合

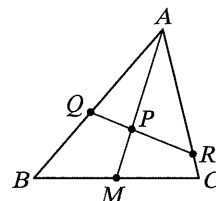
解析：∵ P 點為 $\triangle ABC$ 的重心，設 \overline{BC} 的中點為 M

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} \overrightarrow{AQ} + \frac{2}{3a} \overrightarrow{AR} \right)$$

$$= \frac{1}{3a} \overrightarrow{AQ} + \frac{2}{9a} \overrightarrow{AR}$$



$$\because Q, P, R \text{ 三點共線} \therefore \frac{1}{3a} + \frac{2}{9a} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9a} = 1 \Rightarrow a = \frac{5}{9}$$

13. $\frac{1}{2}$

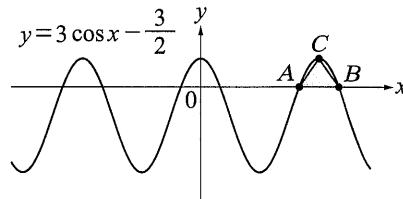
出處：第三冊〈三角函數〉

目標：三角函數的圖形

解析：將 $y = 3 \cos x - \frac{3}{2}$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 可得

$$y = 3 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{3}{2} \text{ 的圖形，平移後面積不變}$$

故考慮 $y = 3 \cos x - \frac{3}{2}$ 的圖形即可



$$\text{當 } 3 \cos x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

由上圖可知圖形與 x 軸交於 $A \left(\frac{5\pi}{3}, 0 \right), B \left(\frac{7\pi}{3}, 0 \right)$

$$y = 3 \cos x - \frac{3}{2} \text{ 的最大值為 } 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\triangle ABC \text{ 的面積為 } \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \pi$$

故著色三角形的面積為 $\frac{1}{2} \pi$ 。

14. $8 + 4\sqrt{3}$

出處：第一冊〈數與式〉、第三冊〈三角函數〉

目標：算幾不等式、餘弦定理、三角形面積公式

解析：令 A 點坐標為 $(\sqrt{3}t, t)$ ， B 點坐標為 $(a, 0)$ ， $t, a > 0$

則 $\overline{OA} = 2t$ ， $\overline{OB} = a$ ， $\angle AOB = 30^\circ$

由餘弦定理得 $16 = 4t^2 + a^2 - 4at \cos 30^\circ$

$$= 4t^2 + a^2 - 2\sqrt{3}at$$

由算幾不等式可知

$$\frac{4t^2 + a^2}{2} \geq \sqrt{4a^2t^2}$$

$$\Rightarrow 4t^2 + a^2 \geq 2\sqrt{4a^2t^2} = 4at$$

$$\Rightarrow 4t^2 + a^2 - 16 \geq 4at - 16$$

$$\text{因此 } 2\sqrt{3}at = 4t^2 + a^2 - 16 \geq 4at - 16$$

$$\Rightarrow 4at - 2\sqrt{3}at \leq 16$$

$$\Rightarrow at \leq \frac{16}{4 - 2\sqrt{3}} = 8(2 + \sqrt{3})$$

又 $\triangle OAB$ 面積為

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \sin \angle AOB$$

$$= \frac{1}{2} \times 2t \times a \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} at$$

$$\leq \frac{1}{2} \times 8(2 + \sqrt{3}) = 4(2 + \sqrt{3}) = 8 + 4\sqrt{3}$$

故 $\triangle OAB$ 面積的最大值為 $8 + 4\sqrt{3}$ 。

15. 100

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：兩平行線距離

解析：設 $(0, 8)$ 、 $(9, 2)$ 、 $(6, 0)$ 、 $(-5, 4)$ 所在的直線方程式

分別為 $L_1: ax + by = c_1$ 、 $L_3: bx - ay = c_3$ 、

$L_2: ax + by = c_2$ 、 $L_4: bx - ay = c_4$

$$\text{將點代入分別得到} \begin{cases} 8b = c_1 \\ 9b - 2a = c_3 \\ 6a = c_2 \\ -5b - 4a = c_4 \end{cases} \dots (*)$$

又正方形的邊長為兩平行線 L_1, L_2 或 L_3, L_4 的距離

令正方形邊長為 ℓ ，則

$$\ell = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c_4 - c_3|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

將(*)的值得代入得

$$\ell = \frac{|6a - 8b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2a - 14b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow 4a = -3b \text{ 或 } 2a = 11b$$

代回 ℓ 得到正方形邊長為 $2\sqrt{5}$ 或 10

故該田地最大面積為 100 平方單位。

[另解]

可改設直線方程式為 $mx - y + 8 = 0$ 、 $x + my - 9 - 2m = 0$ 、

$mx - y - 6m = 0$ 、 $x + my + 5 - 4m = 0$ 。

16. $3\sqrt{5} + \frac{13}{2}$

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：正餘弦函數的疊合

解析：令 $\angle POB = \theta$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$)

根據餘弦定理 $\overline{PC} = \sqrt{13 - 12 \cos \theta}$

$OCDP$ 面積為 $\triangle OPC + \triangle PCD$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times \overline{PC}^2$$

$$= 3 \sin \theta + \frac{13}{2} - 6 \cos \theta$$

$$= 3\sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sin \theta - \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \theta \right) + \frac{13}{2}$$

$$= 3\sqrt{5} \sin(\theta - \phi) + \frac{13}{2}$$

其中 $\sin \phi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ， $\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$

故 $OCDP$ 面積的最大值為 $3\sqrt{5} + \frac{13}{2}$ ，

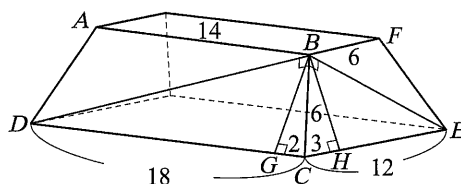
此時 $\theta = 90^\circ + \phi$ ， $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ， $\cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ 。

17. $\frac{\sqrt{6}}{12}$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：兩面角的計算

解析：



如上圖，過 B 作 \overline{BG} 垂直 \overline{CD} 於 G ，過 B 作 \overline{BH} 垂直 \overline{CE} 於 H ，由等腰梯形得 $\overline{CG} = 2$ ，連 \overline{BD}

$\therefore \triangle BCD \sim \triangle GCB(SAS) \therefore \overline{BD} \perp \overline{BC}$

同理得 $\overline{BE} \perp \overline{BC}$

故平面 $ABCD$ 與平面 $BFEC$ 的兩面角即為 $\triangle BDE$ 中的 $\angle DBE$

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{18^2 - 6^2} = 12\sqrt{2}$$

$$\overline{BE} = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$$

$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{CE}^2} = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13}$$

$$\therefore |\cos \theta| = |\cos \angle DBE| = \frac{|\overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 - \overline{DE}^2|}{2 \times \overline{BD} \times \overline{BE}}$$

$$= \frac{|(12\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{3})^2 - (6\sqrt{13})^2|}{2 \times 12\sqrt{2} \times 6\sqrt{3}}$$

$$= \frac{|8 + 3 - 13|}{2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{12}$$

[另解]

由 \overline{BC} 中點 M 作 \overline{MP} 垂直 \overline{CD} 於 P ，過 M 作 \overline{MQ} 垂直 \overline{CE} 於 Q ，

利用側面等腰梯形邊長比例可得

$$\overline{BP} = 6\sqrt{2}，\overline{CP} = 9，\overline{BQ} = 3\sqrt{3}，\overline{CQ} = 6，$$

且 $\overline{PQ} = 3\sqrt{13}$

$$\text{故 } |\cos \theta| = \frac{|(6\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{13})^2|}{2 \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{|-18|}{36\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (1)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數的圖形

解析： $f(x)$ 的首項係數 $2 > 0 \Rightarrow$ 圖形的趨勢為右上左下

(1)(3)(5)符合

又 $f(x)$ 的常數項為5，所以 $y=f(x)$ 的圖形通過(0, 5)

故選(1)。

19. $8x+5$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理

解析： $\because f(0)=5, f(2)=16+4a-4a+5=21$

令 $f(x)=x(x-2)q(x)+mx+n$

$\because f(0)=n=5$

$f(2)=2m+n=21 \Rightarrow m=8$

$\therefore f(x)=x(x-2)q(x)+8x+5$

故餘式為 $8x+5$ 。

〔另解〕

利用長除法

$$\begin{array}{r} 2x + (a+4) \\ x^2 - 2x \overline{) 2x^3 + a x^2 - 2a x + 5} \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ (a+4)x^2 - 2a x + 5 \\ \underline{(a+4)x^2 - 2(a+4)x} \\ 8x + 5 \end{array}$$

故餘式為 $8x+5$ 。

◎評分原則

$\because f(0)=5, f(2)=16+4a-4a+5=21$

令 $f(x)=x(x-2)q(x)+mx+n$ (2分)

$\because f(0)=n=5$

$f(2)=2m+n=21 \Rightarrow m=8$ (2分)

$\therefore f(x)=x(x-2)q(x)+8x+5$

故餘式為 $8x+5$ 。(2分)

〔另解〕

利用長除法

$$\begin{array}{r} 2x + (a+4) \\ x^2 - 2x \overline{) 2x^3 + a x^2 - 2a x + 5} \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ (a+4)x^2 - 2a x + 5 \quad (3分) \\ \underline{(a+4)x^2 - 2(a+4)x} \\ 8x + 5 \end{array}$$

故餘式為 $8x+5$ 。(3分)

20. 0.9

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：一次近似函數

解析： $y=f(x)$ 的圖形向左平移1單位，向下平移1單位之後會通過原點

$\Rightarrow y=f(x)$ 的圖形通過(1, 1)

$f(1)=2+a-2a+5=1 \Rightarrow a=6$

$\Rightarrow y=f(x)=2x^3+6x^2-12x+5$

連續利用綜合除法，可得

$f(x)=2(x-1)^3+12(x-1)^2+6(x-1)+1$

故 $g(x)=6(x-1)+1$

則 $g(0.99)=6 \cdot (-0.01)+1=0.94 \approx 0.9$ 。

〔另解〕

$y=f(x)$ 的圖形向左平移1單位，向下平移1單位之後會通過原點

$\Rightarrow y=f(x)$ 的圖形通過(1, 1)

$f(1)=2+a-2a+5=1 \Rightarrow a=6$

$\Rightarrow y=f(x)=2x^3+6x^2-12x+5$

利用微分得 $f'(x)=6x^2+12x-12$

$\therefore f'(1)=6+12-12=6$

則 $y=g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)=6(x-1)+1$

故 $g(0.99)=6 \cdot (-0.01)+1=0.94 \approx 0.9$ 。

◎評分原則

$y=f(x)$ 的圖形向左平移1單位，向下平移1單位之後會通過原點

$\Rightarrow y=f(x)$ 的圖形通過(1, 1)

$f(1)=2+a-2a+5=1 \Rightarrow a=6$

$\Rightarrow y=f(x)=2x^3+6x^2-12x+5$ (2分)

連續利用綜合除法，可得

$f(x)=2(x-1)^3+12(x-1)^2+6(x-1)+1$

故 $g(x)=6(x-1)+1$ (2分)

則 $g(0.99)=6 \cdot (-0.01)+1=0.94 \approx 0.9$ 。(2分)

〔另解〕

$y=f(x)$ 的圖形向左平移1單位，向下平移1單位之後會通過原點

$\Rightarrow y=f(x)$ 的圖形通過(1, 1)

$f(1)=2+a-2a+5=1 \Rightarrow a=6$

$\Rightarrow y=f(x)=2x^3+6x^2-12x+5$ (2分)

利用微分得 $f'(x)=6x^2+12x-12$

$\therefore f'(1)=6+12-12=6$

則 $y=g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)=6(x-1)+1$ (2分)

故 $g(0.99)=6 \cdot (-0.01)+1=0.94 \approx 0.9$ 。(2分)