數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
答案	(2)	(3)	(5)	(1)(2)	(1)(2)(3)(4)	(1)(4)	(1)(2)(3)(4)	(2)(4)	

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)

難易度：易

出處：第三冊第三章〈平面向量〉、第四冊第三章〈矩陣〉

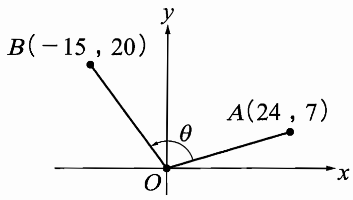
目標：矩陣乘法的幾何性質解讀與向量內積的應用

解析：因為$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$是一個以原點 O 為中心，逆時針旋轉 θ 角的旋轉變換矩陣

所以關於矩陣乘法$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}24 \\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15 \\ 20\end{bmatrix}$的幾何性質是

點 $A(24 , 7)$ 以原點 O 為中心，逆時針旋轉 θ 角到點 $B(-15 , 20)$

如右圖所示



$$\text{因此 } \cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$
$$=\frac{(24 , 7)\cdot(-15 , 20)}{\sqrt{24^2+7^2}\sqrt{(-15)^2+20^2}}$$
$$=\frac{-220}{625}=\frac{-44}{125}$$

又因為 $-\frac{1}{2}<\cos\theta<0$，所以 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}$

故選(2)。

〈另解〉

由$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}24 \\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15 \\ 20\end{bmatrix}$可得$\begin{cases}24\cos\theta-7\sin\theta=-15 \\ 24\sin\theta+7\cos\theta=20\end{cases}$

解聯立得 $\sin\theta=\frac{117}{125}$，$\cos\theta=-\frac{44}{125}$

又因為 $-\frac{1}{2}<\cos\theta<0$，所以 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}$

故選(2)。

2. (3)

難易度：易

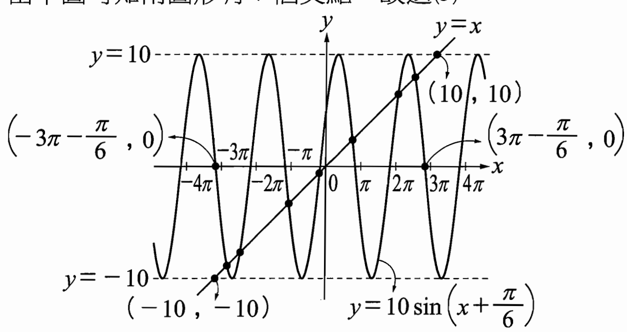
出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：三角函數的圖形

解析：方程式 $5\sqrt{3}\sin x+5\cos x=x$ 的實根個數

即是函數 $y=5\sqrt{3}\sin x+5\cos x=10\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的圖形與直線 $y=x$ 的交點個數

由下圖可知兩圖形有 7 個交點，故選(3)。



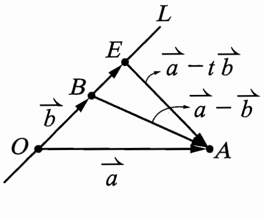
3. (5)

難易度：易

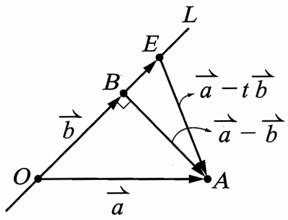
出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量運算的幾何意涵

解析：設 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$，$t\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OE}$，其中點 E 是 $\overrightarrow{b}$ 所在直線 L 上的動點



圖(一)



圖(二)

可知 $|\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}|\geq|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$ 等價於 $\overline{AE}\geq\overline{AB}$

由圖(一)可知若 $\overline{AB}$ 沒有垂直 L 時，存在實數 t 使得 $\overline{AE}<\overline{AB}$

因此，當 $\overline{AB}\perp L$ 時，$\overline{AE}\geq\overline{AB}$ 恆成立，如圖(二)，即 $\overrightarrow{b}\perp(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$

故選(5)。

二、多選題

4. (1)(2)

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：空間概念與空間向量的應用

解析：(1) ○：因為 $\overline{A'B}=\overline{A'D}$，$O$ 為 $\overline{BD}$ 的中點，所以 $\overline{A'O}\perp\overline{BD}$

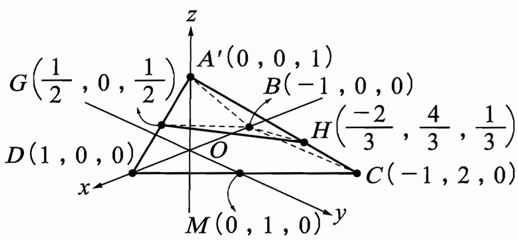
又平面 $A'BD$ 垂直平面 BCD，且平面 $A'BD$ 與平面 BCD 的交線為 $\overline{BD}$

所以 $\overline{A'O}$ 垂直平面 BCD

(2) ○：因為 $\angle CBD=90^\circ$，且 O 為 $\overline{BD}$ 的中點，M 為 $\overline{CD}$ 的中點，則 $\overline{OM}\perp\overline{BD}$

又平面 $A'BD$ 垂直平面 BCD，所以 $\overline{OM}$ 垂直平面 $A'BD$

(3) ╳：因為 $\overline{A'O}$、$\overline{OM}$、$\overline{BD}$ 兩兩垂直，分別以射線 OD、OM、OA' 為 x 軸、y 軸、z 軸的正方向，建立空間直角坐標系，如右圖



設 $O(0,0,0)$，$D(1,0,0)$，$M(0,1,0)$，$A'(0,0,1)$，

$B(-1,0,0)$，$G\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$C(-1,2,0)$，

$H\left(\frac{-2}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$

可得 $\overrightarrow{BG}=\left(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{BH}=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$

利用 $\overrightarrow{BG}$ 與 $\overrightarrow{BH}$ 的外積 $\overrightarrow{BG}\times\overrightarrow{BH}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},2\right)//(2,1,-6)$

可取 $(2,1,-6)$ 為平面 BGH 之一法向量

因為 $(2,1,-6)$ 不垂直 $\overrightarrow{OM}$，所以 $\overline{OM}$ 不平行平面 BGH

(4) ╳：承(3)，$(2,1,-6)$ 不垂直 $\overrightarrow{DC}=(-2,2,0)$，所以 $\overline{DC}$ 不平行平面 BGH

(5) ╳：假設在 $\overline{BC}$ 上存在一點 E，使得 $\overline{DE}$ 平行平面 BGH

設 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda(0,2,0)$

所以 $\overrightarrow{DE}=(-2,2\lambda,0)$，其中 $0<\lambda\leq1$

因此 $\overrightarrow{DE}\cdot(2,1,-6)=(-2,2\lambda,0)\cdot(2,1,-6)=0$，得 $\lambda=2$

這與 $0<\lambda\leq1$ 矛盾

所以在 $\overline{BC}$ 上不存在點 E，使得 $\overline{DE}$ 平行平面 BGH

故選(1)(2)。

5. (1)(2)(3)(4)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：函數圖形與方程式的根

解析：(1) ○：因為函數 $y=f(x+2)$ 的圖形過點 $(-1,3)$，可知 $f(1)=3$

因此函數 $y=f(-x)$ 的圖形亦過點 $(-1,3)$

(2) ○：因為 $f(x-2)=f(-(4-x)+2)$

如果點 (x,y) 在函數 $y=f(x-2)$ 的圖形上

則點 (x,y) 關於直線 $x=2$ 的對稱點 $(4-x,y)$ 亦在函數 $y=f(-x+2)$ 的圖形上

(3) ○：由 $f(x+2)+f(2-x)=4$，可得 $f(x)+f(4-x)=4$，即 $4-f(x)=f(4-x)$

如果點 (x,y) 在函數 $y=f(x)$ 的圖形上，則點 (x,y) 關於點 $(2,2)$ 的對稱點 $(4-x,4-y)$ 亦在函數 $y=f(x)$ 的圖形上

(4) ○：因為 $f(f(x))=(x^2-3x+2)^2-3(x^2-3x+2)+2=x^4-6x^3+10x^2-3x=x(x-3)(x^2-3x+1)$

所以 $f(f(x))=0$ 有四個相異的實根

(5) ╳：不一定成立，例如：$f(x)=\begin{cases}-1，若\ x\geq 0\\ 1，若\ x<0\end{cases}$

故選(1)(2)(3)(4)。

6. (1)(4)

難易度：中

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：在真實生活中，能思考並計算機率與條件機率

解析：(1) ○：$\frac{1}{8}\times\frac{1}{10}+\frac{7}{8}\times\frac{9}{10}=0.8$

(2) ╳：應為 $\frac{1}{8}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{7}{8}\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=0.09$

(3) ╳：應為 $\frac{1}{8}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2+\frac{7}{8}\times\left(\frac{1}{10}\right)^2=0.11$

(4) ○：$\dfrac{\frac{7}{8}\times\frac{9}{10}}{\frac{1}{8}\times\frac{1}{10}+\frac{7}{8}\times\frac{9}{10}}=\frac{63}{64}=0.98\cdots\cdots>0.95$

(5) ╳：應為 $\dfrac{\frac{1}{8}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2}{\frac{1}{8}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2+\frac{7}{8}\times\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{81}{88}=0.92\cdots\cdots<0.95$

故選(1)(4)。

7. (1)(2)(3)(4)

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：熟悉外積與正射影向量之涵義，能思考一些常見命題的逆敘述

解析：(1) ○：因為 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 不共平面，所以 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}$ 必不相等

(2) ○：考慮相對應之平行四邊形面積

(3) ○：由正射影向量公式即可得

(4) ○：不失一般性可設 $\overrightarrow{v}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{a}=(a,0,0)$，$\overrightarrow{b}=(0,b,0)$，$\overrightarrow{c}=(0,0,c)$ 代入即可得證

(5) ╳：不一定，反例可取 $\overrightarrow{v}=(1,\sqrt{2}+1,1)$，$\overrightarrow{a}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{b}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{c}=(0,0,1)$

故選(1)(2)(3)(4)。

8. (2)(4)

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：過圓上一點的切線方程式、空間中平面與直線的相交

解析：(1)╳：因為圓 C 在 xy 平面上，所以可用平面坐標的概念求算

此時過圓 $C：x^2+y^2=1$ 上一點 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 的切線方程式為 $(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$

因此，在空間坐標上，此切線 L 的方程式為 $\begin{cases}(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1\\ z=0\end{cases}$

(2)○：切線 L 分別與 x、y 軸交於點 $A\left(\dfrac{1}{\cos\theta}, 0, 0\right)$、點 $B\left(0, \dfrac{1}{\sin\theta}, 0\right)$

而所圍成的三角形面積為 $\dfrac{1}{2}\times\left|\dfrac{1}{\cos\theta}\right|\times\left|\dfrac{1}{\sin\theta}\right|=\left|\dfrac{1}{\sin 2\theta}\right|\geq 1$

因為 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以等號成立在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，可知三角形面積的最小值為 1

(3)╳：由(2)可得 L 的方向向量 $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{1}{\cos\theta}, \dfrac{1}{\sin\theta}, 0\right) // (\sin\theta, -\cos\theta, 0)$

不妨取 $\overrightarrow{u}=(\sin\theta, -\cos\theta, 0)$ 作為 L 的方向向量，又平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n}=(6, 3, 2)$

若 L 與 E 平行，則 $(\sin\theta, -\cos\theta, 0)\cdot(6, 3, 2)=0$，得 $6\sin\theta-3\cos\theta=0$，此時 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$

(4)○：由(3)知 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$，又 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，有 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，可得切點 $P\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$

則 L 與 E 的距離 $d(L, E)=d(P, E)=\dfrac{\left|6\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}+3\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2\times 0\right|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

(5)╳：若 L 與 E 垂直，則 $(\sin\theta, -\cos\theta, 0) // (6, 3, 2)$

即 $\dfrac{\sin\theta}{6}=\dfrac{-\cos\theta}{3}=\dfrac{0}{2}=0$

得 $\sin\theta=\cos\theta=0$，θ 顯然無實數解

因此不存在切線 L 與平面 E 垂直

故選(2)(4)。

三、選填題

A. $(5, -3)$

難易度：易

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：熟悉矩陣運算，並銜接將來線性代數對於迴歸直線的解釋

解析：將 $E=\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ 代入 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}\cdot E=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

可得 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3&3\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}$

故 $a=5$，$b=-3$

故數對 $(a, b)=(5, -3)$。

B. -1

難易度：中

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：複數的幾何意涵

解析：原方程式等價於 $x^4(x+1)=-1$，設 z 是滿足條件的根

因為 $|z|=1$，可得 $|z+1|=1$

所以所有絕對值為 1 的複數根，在複數平面上只可能是以 $(0, 0)$ 為圓心、1 為半徑的圓與以 $(-1, 0)$ 為圓心、1 為半徑的圓的交點所對應的數

解得 $z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

因此 x^5+x^4+1 可分解為 $(x^2+x+1)(x^3-x+1)$

經檢驗這兩個複數都是原方程式的根，且不是重根，於是可得所有絕對值為 1 的根的和為 -1。

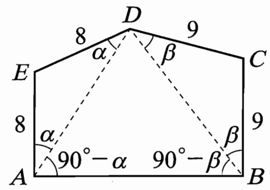
C. $6\sqrt{2}$

難易度：中

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：在動態圖形中，活用正弦定理，餘角關係以及基本邊角關係

解析：假設$\angle EAD=\alpha$，$\angle CBD=\beta$，$\triangle ABD$ 之外接圓半徑為 R



則 $\overline{AD}=2\times8\times\cos\alpha$，$\overline{BD}=2\times9\times\cos\beta$

由正弦定理，可得$\begin{cases}\dfrac{2\times8\times\cos\alpha}{\sin(90^\circ-\beta)}=2R\\ \dfrac{2\times9\times\cos\beta}{\sin(90^\circ-\alpha)}=2R\end{cases}$

兩式相乘即得 $2^2\times8\times9=2^2\times R^2$

故 $R=6\sqrt{2}$ 。

第貳部分：非選擇題

一、⑴略；⑵ 48 張

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：具備指對數基礎概念與解讀計算機的素養

解析：⑴因為 3^{1000} 是 478 位數，且 $10^{477}<3^{1000}<10^{478}$

不等式同取 log 後可得 $477<\log 3^{1000}<478$

故 $0.477<\log 3<0.478$。

⑵因為 $\log 3^{100000}=100000\log 3$ 介於 47700 與 47800 之間

因此 3^{100000} 至少是 47701 位數，至多是 47800 位數

又每張 A4 紙最多可印 1000 個數字，所以最少要 48 張 A4 紙才夠印。

二、⑴$\dfrac{1}{40}$ ；⑵$\dfrac{3}{5}$ ；⑶$\dfrac{34}{5}$元

難易度：中

出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：能了解期望值的意義

解析：⑴同行或同列且和為 12 的組合有三種：$2+10=4+8=5+7=12$

故小樺得 12 元的機率 $P=\dfrac{3}{C^{16}_2}=\dfrac{1}{40}$ 。

⑵任抽兩球會同行的機率為 $P(\text{同行})=\dfrac{C^4_1\times C^4_2}{C^{16}_2}=\dfrac{24}{120}=\dfrac{1}{5}$

任抽兩球會同列的機率與同行的機率相同

因此小樺得 0 元的機率 $P=1-〔P(\text{同行})+P(\text{同列})〕$

$=1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}$ 。

⑶每個格子內金額的獎金被獲得的機會均等，其機率為$\dfrac{C^2_1\times C^3_1}{C^{16}_2}=\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$

則小樺玩一次所得獎金的期望值為 $(1+2+\cdots\cdots+16)\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{34}{5}$(元)。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、⑴略；⑵ 48 張

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：具備指對數基礎概念與解讀計算機的素養

解析：⑴因為 3^{1000} 是 478 位數　(1 分)，且 $10^{477}<3^{1000}<10^{478}$　(1 分)

不等式同取 log 後可得 $477<\log 3^{1000}<478$　(1 分)

故 $0.477<\log 3<0.478$。　(1 分)

⑵因為 $\log 3^{100000}=100000\log 3$ 介於 47700 與 47800 之間

因此 3^{100000} 至少是 47701 位數，至多是 47800 位數　(3 分)

又每張 A4 紙最多可印 1000 個數字，所以最少要 48 張 A4 紙才夠印。　(3 分)

二、⑴ $\frac{1}{40}$；⑵ $\frac{3}{5}$；⑶ $\frac{34}{5}$ 元

難易度：中

出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：能了解期望值的意義

解析：⑴同行或同列且和為 12 的組合有三種：$2+10=4+8=5+7=12$　(1 分)

故小樺得 12 元的機率 $P=\frac{3}{C_2^{16}}=\frac{1}{40}$。　(3 分)

⑵任抽兩球會同行的機率為 $P(\text{同行})=\frac{C_1^4\times C_2^4}{C_2^{16}}=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

任抽兩球會同列的機率與同行的機率相同　(2 分)

因此小樺得 0 元的機率 $P=1-[P(\text{同行})+P(\text{同列})]$

$=1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$。　(2 分)

⑶每個格子內金額的獎金被獲得的機會均等，其機率為 $\frac{C_1^2\times C_1^3}{C_2^{16}}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$　(3 分)

則小樺玩一次所得獎金的期望值為 $(1+2+\cdots\cdots+16)\times\frac{1}{20}=\frac{34}{5}$ (元)。　(3 分)