

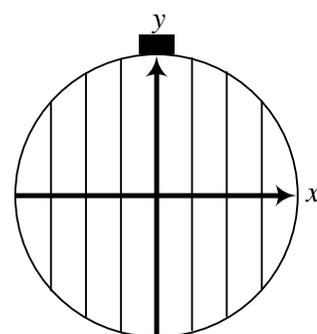
107 學年度全國高級中學指定科目第一次模擬考數學甲

第壹部分：選擇題



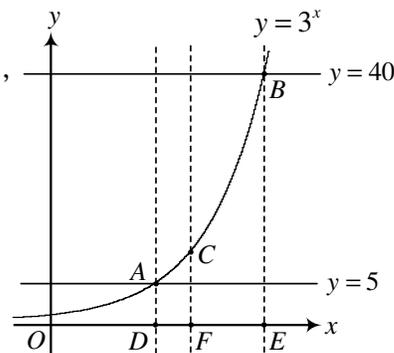
一、單選題：(24分)

1. 在動漫七龍珠中，悟空從「天下第一武道大會」場地觀察四星球位置，已知大會場地位於直角坐標系之原點。另外，悟空所持之龍珠雷達可觀察範圍為方圓 4 公里內的水平面(含雷達邊界)，如右圖所示，且悟空觀察出四星球位置在雷達中之格子點(x, y 坐標皆為整數)上。滿足上述條件的點出現之機率皆相等，則此時大會場地與四星球的距離不大於 3 公里的機率為下列哪一個選項？



- (1) 0 (2) $\frac{29}{48}$ (3) $\frac{7}{12}$ (4) $\frac{29}{49}$ (5) $\frac{28}{49}$

2. 右圖為 $y = 3^x$ 的圖形，分別與直線 $y = 5$ ， $y = 40$ 交於 A, B 兩點。過 A, B 兩點對 x 軸作鉛垂線得垂足 D, E 。已知 \overline{DE} 上有一 F 點，且 $2\overline{DF} = \overline{FE}$ 。由 F 點對 x 軸作鉛垂線交 $y = 3^x$ 於 C 點，試求 C 點的 y 坐標為何？



- (1) 15 (2) $\frac{50}{3}$ (3) 10 (4) $\frac{1000}{3}$ (5) 14

3. 已知多項式 $f(x) = (-16) \times \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1)(-1-1)(-1-2)(-1-3)} + (-2) \times \frac{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-1)(0-2)(0-3)} + 1 \times \frac{(x+1)x(x-2)(x-3)}{(1+1) \times 1 \times (1-2)(1-3)} + (-3) \times \frac{(x+1)x(x-1)(x-3)}{(2+1) \times 2 \times (2-1)(2-3)} + (-6) \times \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{(3+1) \times 3 \times (3-1)(3-2)}$ ，

試問下列敘述何者錯誤？

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ 不會有大於 2 的實根 (2) 方程式 $f(x) = 0$ 只有三個正實根
 (3) 方程式 $f(x) = 0$ 在 0 到 2 之間只有兩實根 (4) 方程式 $f(x) = 0$ 必有負實根
 (5) 方程式 $f(x) = 0$ 的解不可能是兩實根兩虛根

4. 設 $A = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ ，則 $A + A^4 + A^7 + \dots + A^{3k-2} + \dots + A^{100} = aA$ ，其中 a 為實數， $k=1, 2, 3, \dots, 34$ ，則 a 的值為何？

- (1) $\frac{1-8^{34}}{9}$ (2) $\frac{1-8^{34}}{-7}$ (3) $\frac{1+8^{33}}{9}$ (4) $\frac{1-8^{33}}{9}$ (5) $\frac{1-8^{33}}{-7}$

二、多選題：(24分)

5. 下列哪些數可作為對數不等式 $\log_x(2x^3 + x) > 2\log_x(x+1) + 1$ 的解？

- (1) π (2) $\frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{4}$ (5) $\frac{\pi}{5}$

6. 已知 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，若 $\tan \theta$ 與 $\cot \theta$ 為一元二次方程式 $AX^2 + BX + C = 0$ 的兩根，請選出正確的選項。(1) $A = C$ (2) $\frac{B}{A} \geq -2$ (3) $AB < 0$ (4) $\sin 2\theta = -\frac{2B}{A}$

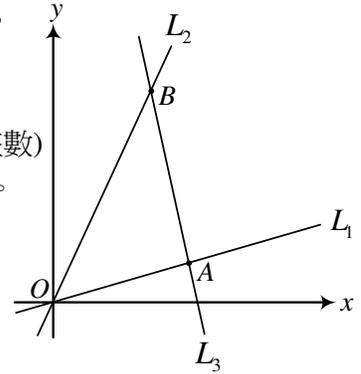
- (5) $(3 + \tan \theta)(3 + \cot \theta) = \frac{9A - 3B + C}{A}$

7. 設一平面上有兩定點 $A(-1,4)$, $B(2,3)$ 及圓 $C: x^2 + y^2 - 2x - 10y + 25 = 0$ 。今有一螞蟻在 \overline{AB} 上移動，若螞蟻表動點 $P(x, y)$ ，則下列敘述何者正確？
- (1) $3x - 4y + 5$ 之最小值為 -14 (2) $2x^2 + y^2 - 3$ 之最大值為 15
- (3) \overline{AB} 的參數式可表示為 $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{11}{3} - \frac{1}{3}t \end{cases}, -1 \leq t \leq 2$
- (4) 平面上存在一直線 M 通過圓 C 之圓心 O 且與 \overline{AB} 垂直
- (5) 若螞蟻距離圓 C 最近時，則其最短距離為 $\frac{\sqrt{10}-1}{2}$

三、選填題：(28 分)

- A. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係式 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3^{n(n-1)} \times a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ ，若 $a_9 = 3^s$ ，則 $s = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- B. 如右圖，有三條相異直線 L_1, L_2, L_3 ，其中 L_1, L_2 通過原點 O ，
 L_3 與兩坐標軸皆不平行， L_1, L_2 的斜率分別為 $\frac{1}{3}, 2$ 。已知 L_3 與
 L_1, L_2 分別交於 A, B 兩點且 A, B 皆為格子點 (x, y 坐標皆為整數)
 ，若 $\triangle OAB$ 的面積為 5 ，則 L_3 的直線方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

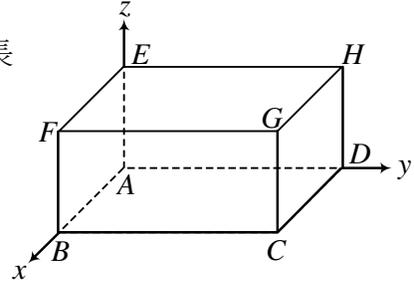


- C. 小明、小華、小王 一同去遊樂園玩，三人玩雲霄飛車的機率分別為 $0.5, 0.4, 0.3$ 。若 小王 去玩雲霄飛車時，小華 跟著去玩的機率為 0.5 ；而 小王 去玩雲霄飛車時，小明 不跟著去玩的機率為 0.4 。若 小華 和 小王 都不去玩雲霄飛車時，小明 去玩雲霄飛車的機率為 0.4 。三人都去玩雲霄飛車的機率為 0.05 ，則三人都不去玩雲霄飛車的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- D. 已知 z, w 為複數， $i = \sqrt{-1}$ ，且滿足方程式 $z^6 = (z-1)^6$ 以及 $\frac{|w-5-i|}{|w-5-4i|} = \frac{1}{2}$ ，則 $|z-w|$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。（化為最簡分數）

第貳部分：非選擇題(24 分)

一、如右圖，空間坐標系中有一長方體 $ABCD-EFGH$ ，其中稜長 $\overline{AB}=3$ ， $\overline{AE}=3$ ， $\overline{AD}=6$ ，則：



- (1) 若 P 點在 \overline{CE} 上， $\overline{EP}:\overline{PC}=1:2$ ，試求過 P 點且與 \overline{CE} 垂直的平面方程式。(5 分)
- (2) 承(1)之平面與長方體 $ABCD-EFGH$ 截出一個四邊形，試問此四邊形的面積為何？(7 分)

二、已知坐標面上有原點 $O(0,0)$ ， $A(3,0)$ ， $B(-4,3)$ 三點。今投擲一公正骰子兩次，將所得點數

(依序為 x, y) 填入 2×2 矩陣 $M = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ 中，並以矩陣 M 分別對點 O, A, B 做線性變換後得到

點 O', A', B' ，請完成下列各小題：

- (1) 若擲出點數依序為 $x=2$ ， $y=5$ ，試求 A' 及 B' 兩點的坐標。(2 分)
- (2) 承(1)，試求 $\frac{\Delta O'A'B' \text{面積}}{\Delta OAB \text{面積}}$ 之值。(3 分)
- (3) 令隨機變數 $X = \Delta O'A'B' \text{面積}$ ，試求期望值 $E(X)$ 。(7 分)

RA5106 107 學年度全國高級中學指定科目第一次模擬考數學甲

選擇題：1. (4) 2. (3) 3. (1) 4. (2) 5. (1)(4)(5) 6. (1)(3)(5) 7. (1)(2)(3)(4)

選填題：A. 240 B. $3x+y=10$ C. 0.27 D. $\frac{5}{2}$

非選擇題：一、(1) $x+2y-z=3$ (2) $\frac{9\sqrt{6}}{2}$

二、(1) $A'(6,15)$, $B'(-5,-17)$ (2) 3 (3) $\frac{35}{4}$