數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
答案	(4)	(3)	(1)	(2)	(1)(4)(5)	(1)(3)(5)	(1)(2)(3)(4)		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第二冊第三章〈機率〉、第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：古典機率的求法、利用坐標求兩點距離

解析：此點的 x，y 坐標(格子點)可能情況共有 49 種，而與原點距離不大於 3 的點列舉如下：

① $x=0$ 時：y 可為 0，±1，±2，±3，即表示共有 7 種可能；

② $x=\pm1$ 時：y 可為 0，±1，±2，即表示共有 10 種可能；

③ $x=\pm2$ 時：y 可為 0，±1，±2，即表示共有 10 種可能；

④ $x=\pm3$ 時：y 可為 0，即表示共有 2 種可能

所以與大會場地距離不大於 3 的點共有 $7+10+10+2=29$ 種可能，其機率為 $\dfrac{29}{49}$

故選(4)。

2. (3)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數與對數函數之應用

解析：由題目可知 $A(\log_3 5 , 5)$、$B(\log_3 40 , 40)$，則垂足 $D(\log_3 5 , 0)$、$E(\log_3 40 , 0)$

因為 F 點在 $\overline{DE}$ 上，且 $2\overline{DF}=\overline{FE}$

所以 F 點的 x 坐標為 $\dfrac{1}{3}\log_3 40+\dfrac{2}{3}\log_3 5=\dfrac{1}{3}\log_3(40\times5^2)=\log_3 10$

即 C 點的 y 坐標為 $3^{\log_3 10}=10$，故選(3)。

3. (1)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：實係數多項式方程式根的性質

解析：如右略圖所示，因為多項式 $f(x)$ 的領導係數為正，

可知函數 $f(x)$ 的圖形最右方是上升的。

又 $f(3)=-6$ 且 $f(4)=4$，$f(3)\cdot f(4)<0$

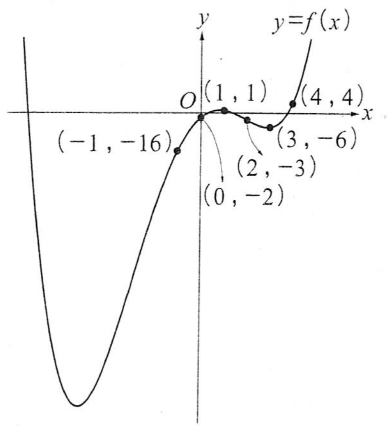
代表 $f(x)=0$ 必有大於 3 的實根

因為方程式 $f(x)=0$ 為整係數多項式方程式

亦為實係數多項式方程式，即虛根必須共軛

同理，根據 $f(0)\cdot f(1)<0$ 及 $f(1)\cdot f(2)<0$

則方程式 $f(x)=0$ 恰有四個實根(三正根一負根)，故選(1)。



4. (2)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉、第三冊第一章〈三角〉、第四冊第三章〈矩陣〉

目標：能夠對旋轉矩陣進行乘法運算，正確運用等比級數求和公式

解析：$A=-2\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}$ 為一旋轉矩陣

則 $A^3=(-2)^3\begin{bmatrix}\cos\pi & -\sin\pi\\ \sin\pi & \cos\pi\end{bmatrix}=-8\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=8\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=8I$

所以 $A^4=A^3\cdot A=8A$，

$A^7=A^3\cdot A^3\cdot A=8^2A$，

$\vdots$

$A^{3k-2}=8^{k-1}A$，

$\vdots$

$A^{100}=8^{33}A$

則 $A+A^4+A^7+\cdots\cdots+A^{3k-2}+\cdots\cdots+A^{100}$

$=A+8A+8^2A+\cdots\cdots+8^{33}A$

$=(1+8+8^2+\cdots\cdots+8^{33})A$

$=\dfrac{(1-8^{34})}{1-8}A=\dfrac{1-8^{34}}{-7}A$

所以 $a=\dfrac{1-8^{34}}{-7}$

故選(2)。

二、多選題

5. (1)(4)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數不等式和高次不等式的求解

解析：因為 $\begin{cases} x>0，x\neq1 \\ 2x^3+x>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow x>0，x\neq1$

所求 $\log_x(2x^3+x)>2\log_x(x+1)+1 \Rightarrow \log_x(2x^3+x)>\log_x(x+1)^2+\log_x x \Rightarrow \log_x(2x^3+x)>\log_x x(x+1)^2$

① $0<x<1$ 時：

$2x^3+x<x(x+1)^2 \Rightarrow x^3-2x^2<0 \Rightarrow x^2(x-2)<0$

則 $x<2$ 且 $0<x<1$，故 $0<x<1$

② $x>1$ 時：

$2x^3+x>x(x+1)^2 \Rightarrow x^3-2x^2>0 \Rightarrow x^2(x-2)>0$

則 $x>2$ 且 $x>1$，故 $x>2$

由①、②可知，對數不等式解的範圍為 $0<x<1$ 或 $x>2$

故選(1)(4)(5)。

6. (1)(3)(5)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第二章〈多項式函數〉、選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：正確運用根與係數關係、三角函數特殊關係式、理解算幾不等式

解析：根據根與係數的關係得 $\begin{cases} \tan\theta+\cot\theta=-\dfrac{B}{A} \\ \tan\theta\cdot\cot\theta=\dfrac{C}{A} \end{cases}$

(1) ○：$\tan\theta\cdot\cot\theta=1=\dfrac{C}{A}$ $\quad\therefore A=C$

(2) ╳：由算幾不等式可知

$\dfrac{\tan\theta+\cot\theta}{2}\geq\sqrt{\tan\theta\cdot\cot\theta}=1 \Rightarrow \tan\theta+\cot\theta\geq2$

故 $-\dfrac{B}{A}\geq2 \Rightarrow \dfrac{B}{A}\leq-2$

(3) ○：$\because 0^\circ<\theta<90^\circ$ $\quad\therefore -\dfrac{B}{A}>0 \Rightarrow \dfrac{B}{A}<0 \Rightarrow AB<0$

(4) ╳：$\tan\theta+\cot\theta=-\dfrac{B}{A}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\dfrac{B}{A} \Rightarrow \dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=-\dfrac{B}{A}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=-\dfrac{B}{A} \Rightarrow \dfrac{2}{2\sin\theta\cdot\cos\theta}=-\dfrac{B}{A} \Rightarrow \sin2\theta=-\dfrac{2A}{B}$

(5) ○：$(3+\tan\theta)(3+\cot\theta)=9+3(\tan\theta+\cot\theta)+\tan\theta\cdot\cot\theta$

$=9+3\left(-\dfrac{B}{A}\right)+\dfrac{C}{A}=\dfrac{9A-3B+C}{A}$

故選(1)(3)(5)。

7. (1)(2)(3)(4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第三冊第二章〈直線與圓〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：能藉由二次多項式函數配方後求出極值、能利用方向向量寫出直線參數式、能藉由點和直線的關係求出其距離

解析：$\because \overrightarrow{AB}=(3,-1)$ $\therefore \overleftrightarrow{AB}$ 的方向向量可表示成 $(3,-1)$

則 $\overline{AB}$ 的參數式為 $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=4-t \end{cases}$，$0\le t\le 1$

(1) ○：$3x-4y+5=3(-1+3t)-4(4-t)+5=-14+13t$

$\because 0\le t\le 1$ $\therefore 3x-4y+5$ 之最小值為 -14

(2) ○：$2x^2+y^2-3=2(-1+3t)^2+(4-t)^2-3$

$=19t^2-20t+15$

$=19\left(t-\dfrac{10}{19}\right)^2+\dfrac{185}{19}$

當 $t=0$ 時，$2x^2+y^2-3$ 有最大值為 15

(3) ○：當 $t=-1$ 時，表點 $A(-1,4)$；當 $t=2$ 時，表點 $B(2,3)$

(4) ○：將圓 C：$x^2+y^2-2x-10y+25=0$ 配方

可得圓的標準式為 $(x-1)^2+(y-5)^2=1$，其圓心坐標為 $O(1,5)$，半徑 r 為 1

$\because \overline{OA}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$\overline{OB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\overline{OA}=\overline{OB}$

$\therefore$直線 M 為 $\overline{AB}$ 的中垂線

可知直線 M 與 $\overline{AB}$ 垂直

(5) ╳：承(4)，過點 A，B 的直線方程式為 L：$x+3y=11$

故所求為 $d(O,L)-r=\dfrac{|1+15-11|}{\sqrt{1^2+3^2}}-1=\dfrac{5}{\sqrt{10}}-1=\dfrac{\sqrt{10}}{2}-1$

故選(1)(2)(3)(4)。

三、選填題

A. 240

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：能由數列的遞迴關係推導出數列的一般式、簡易級數求和公式

解析：

$$\begin{array}{rl} & a_9=3^{9(9-1)}\times a_8 \\ & a_8=3^{8(8-1)}\times a_7 \\ & \vdots \\ & a_3=3^{3(3-1)}\times a_2 \\ \times & a_2=3^{2(2-1)}\times a_1 \\ \hline & a_9=3^s \end{array}$$

其中 $s=\sum_{n=2}^{9}n(n-1)=\sum_{n=2}^{9}n^2-\sum_{n=2}^{9}n=\left(\dfrac{9\times10\times19}{6}-1\right)-\left(\dfrac{10\times9}{2}-1\right)=240$

故 $s=240$。

B. $3x+y=10$

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：應用二階行列式求面積

解析：$\because L_1$ 與 L_2 的斜率分別為 $\dfrac{1}{3}$、2

$\therefore$設 $A(3k_1,k_1)$，$B(k_2,2k_2)$，且 k_1，k_2 皆為正整數

$\triangle OAB$ 的面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3k_1 & k_1 \\ k_2 & 2k_2 \end{vmatrix}\right|=5 \Rightarrow 5k_1k_2=10$ (k_1，k_2 皆為正整數)

$\therefore k_1k_2=2$

(1)若 $k_1=1$，$k_2=2$，則 $A(3,1)$，$B(2,4)$

則 L_3：$3x+y=10$

(2)若 $k_1=2$，$k_2=1$，則 $A(6,2)$，$B(1,2)$，與題圖不合

故 L_3 的直線方程式為 $3x+y=10$。

C. 0.27

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率的定義與運算

解析：設小明玩雲霄飛車為 A 事件；

小華玩雲霄飛車為 B 事件；

小王玩雲霄飛車為 C 事件

則 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(C)=0.3$

$P(B\mid C)=0.5$，$P(A'\mid C)=0.4$，$P(A\mid B'\cap C')=0.4$，$P(A\cap B\cap C)=0.05$

$\because P(B\cap C)=P(B\mid C)\times P(C)=0.5\times 0.3=0.15$，

$P(A'\cap C)=P(A'\mid C)\times P(C)=0.4\times 0.3=0.12$，

$P(B'\cap C')=1-P(B)-P(C)+P(B\cap C)$

$=1-0.4-0.3+0.15=0.45$

$\therefore P(A\cap B'\cap C')=P(A\mid B'\cap C')\times P(B'\cap C')$

$=0.4\times 0.45=0.18$

故 $P(A'\cap B'\cap C')=P(B'\cap C')-P(A\cap B'\cap C')=0.45-0.18=0.27$。

D. $\dfrac{5}{2}$

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：能將複數方程式轉換為幾何圖形

解析：以棣美弗定理解 $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^6=1$，

可令 $\dfrac{z-1}{z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 代入，得 $r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=1^6=1$

解得 $r=1$，$\theta=\dfrac{2\pi+2k\pi}{6}$，$k=0$，1，2，3，4，5

則 $\dfrac{z-1}{z}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 或 $-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 或 ± 1

故 $z=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}i$ $\left(\text{其中 } \dfrac{z-1}{z}=1 \text{ 無解}\right)$

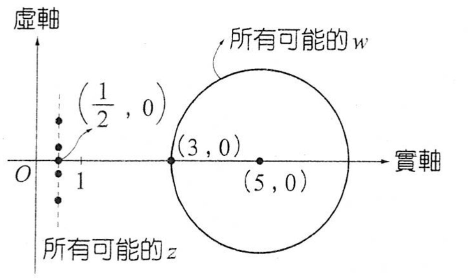
令 $w=a+bi$，a，b 均為實數，

代入 $\dfrac{|w-5-i|}{|w-5-4i|}=\dfrac{1}{2}$ 得 $\dfrac{|(a-5)+(b-1)i|}{|(a-5)+(b-4)i|}=\dfrac{1}{2}$

化簡後得 $4[(a-5)^2+(b-1)^2]=(a-5)^2+(b-4)^2$

$\Rightarrow (a-5)^2+b^2=2^2$

即 w 在複數平面上所成之圖形為圓心 $(5,0)$，半徑為 2 的一圓，如右圖所示



故知 $|z-w|$ 的最小值為 $3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$。

〈另解〉

由 $\dfrac{|w-5-i|}{|w-5-4i|}=\dfrac{1}{2}$ 的幾何意義(Apollonius 圓)知

w 在複數平面所成之圖形為圓心 $(5,0)$，半徑為 2 的一圓

其中一解為 $w=3+0i$，如右圖所示

由 $z^6=(z-1)^6\Rightarrow |z-0|^6=|z-1|^6$ 知

z 到 $(0,0)$ 的距離等於 z 到 $(1,0)$ 的距離

$\Rightarrow$ 所有 z 均在 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 兩點連線段的中垂線上

即實部均為 $\dfrac{1}{2}$，其中一解為 $z=\dfrac{1}{2}+0i$，由右圖可知

故知 $|z-w|$ 的最小值為 $3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $x+2y-z=3$；(2) $\dfrac{9\sqrt{6}}{2}$

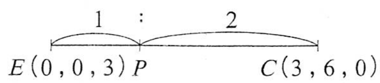
出處：第四冊第一章〈空間向量〉、第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：立體圖形坐標化、截面圖形判斷、向量應用

解析：(1)將長方體坐標化，使 A 為原點$(0,0,0)$，$C(3,6,0)$，$E(0,0,3)$

得 $\overrightarrow{EC}=(3,6,-3)\,/\!/\,(1,2,-1)$ 為所求平面的法向量

P 點在 $\overline{CE}$ 上使 $\overline{EP}:\overline{PC}=1:2$，如右圖



利用分點公式求出 P 點坐標

所以 $P\left(\dfrac{2\times0+1\times3}{3},\dfrac{2\times0+1\times6}{3},\dfrac{2\times3+1\times0}{3}\right)=(1,2,2)$

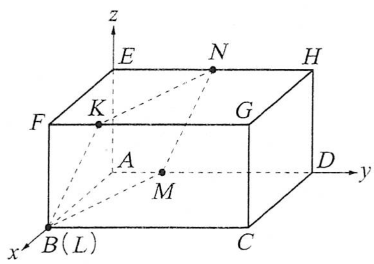
故所求平面方程式為 $x+2y-z=3$。

(2) $x+2y-z=3$ 與 y 軸的交點 $M\left(0,\dfrac{3}{2},0\right)$，

與 $\overleftrightarrow{EH}$：$\begin{cases}x=0\\y=t\\z=3\end{cases}$，$t$ 為實數，交點為 $N(0,3,3)$，

與 $\overleftrightarrow{FG}$：$\begin{cases}x=3\\y=s\\z=3\end{cases}$，$s$ 為實數，交點為 $K\left(3,\dfrac{3}{2},3\right)$，

與 $\overleftrightarrow{BC}$：$\begin{cases}x=3\\y=\ell\\z=0\end{cases}$，$\ell$ 為實數，交點為 $L(3,0,0)$



得 $\overrightarrow{KL}=\left(0,-\dfrac{3}{2},-3\right)$，$\overrightarrow{NM}=\left(0,-\dfrac{3}{2},-3\right)$

$\therefore$ 由 $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$，得四邊形 $KLMN$ 為平行四邊形

令 $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{KL}=\left(0,-\dfrac{3}{2},-3\right)$，$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{KN}=\left(-3,\dfrac{3}{2},0\right)$

則四邊形 $KLMN$ 面積為 $\sqrt{|\overrightarrow{u}|^2|\overrightarrow{v}|^2-|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|^2}=\sqrt{\left(\dfrac{9}{4}+9\right)^2-\left(-\dfrac{9}{4}\right)^2}=\dfrac{9\sqrt{6}}{2}$。

二、(1) $A'(6,15)$，$B'(-5,-17)$；(2) 3；(3) $\dfrac{35}{4}$

出處：第四冊第三章〈矩陣〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：能了解線性變換及期望值的計算

解析：(1) A' 點坐標：$\begin{bmatrix}2&1\\5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}$，

B' 點坐標：$\begin{bmatrix}2&1\\5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\-17\end{bmatrix}$。

〈另解〉

由 $\begin{bmatrix}2&1\\5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-4\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-5\\15&-17\end{bmatrix}$，可得 $A'(6,15)$，$B'(-5,-17)$。

(2) $\triangle OAB$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$，

O' 點坐標：$\begin{bmatrix}2&1\\5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，

$\triangle O'A'B'$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}6&-5\\15&-17\end{vmatrix}\right|=\dfrac{27}{2}$，

故 $\dfrac{\triangle O'A'B'\text{ 面積}}{\triangle OAB\text{ 面積}}=3$。

〈另解〉

$$\frac{\triangle O'A'B' \text{ 面積}}{\triangle OAB \text{ 面積}}=\frac{|\det M|\cdot\triangle OAB \text{ 面積}}{\triangle OAB \text{ 面積}}=\left|\begin{vmatrix}2&1\\5&1\end{vmatrix}\right|=3\text{。}$$

(3)因$\triangle O'A'B'$面積$=|\det M|\cdot\triangle OAB$面積

故隨機變數$X=\frac{9}{2}\times|\det M|=\frac{9}{2}|x-y|$

其取值為$X=0$，$\frac{9}{2}\times1$，$\frac{9}{2}\times2$，$\frac{9}{2}\times3$，$\frac{9}{2}\times4$，$\frac{9}{2}\times5$

可得隨機變數X的機率分布表如下：

X	0	$\frac{9}{2}\times1$	$\frac{9}{2}\times2$	$\frac{9}{2}\times3$	$\frac{9}{2}\times4$	$\frac{9}{2}\times5$
$P(X)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

故期望值$E(X)=\frac{1}{36}\left(0\times6+\frac{9}{2}\times10+9\times8+\frac{27}{2}\times6+18\times4+\frac{45}{2}\times2\right)=\frac{35}{4}$。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1)$x+2y-z=3$；(2)$\frac{9\sqrt{6}}{2}$

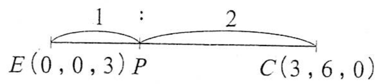
出處：第四冊第一章〈空間向量〉、第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：立體圖形坐標化、截面圖形判斷、向量應用

解析：(1)將長方體坐標化，使A為原點$(0,0,0)$，$C(3,6,0)$，$E(0,0,3)$

得$\overrightarrow{EC}=(3,6,-3)\parallel(1,2,-1)$為所求平面的法向量

P點在$\overline{CE}$上使$\overline{EP}:\overline{PC}=1:2$，如右圖



利用分點公式求出P點坐標

所以$P\left(\frac{2\times0+1\times3}{3},\frac{2\times0+1\times6}{3},\frac{2\times3+1\times0}{3}\right)=(1,2,2)$　(2分)

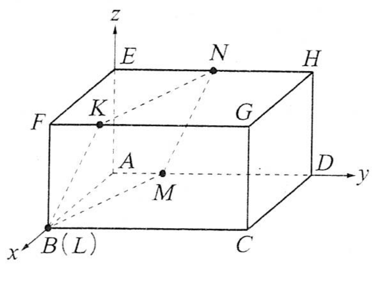
故所求平面方程式為$x+2y-z=3$。　(3分)

(2)$x+2y-z=3$與y軸的交點$M\left(0,\frac{3}{2},0\right)$，

與$\overleftrightarrow{EH}$：$\begin{cases}x=0\\y=t\\z=3\end{cases}$，$t$為實數，交點為$N(0,3,3)$，

與$\overleftrightarrow{FG}$：$\begin{cases}x=3\\y=s\\z=3\end{cases}$，$s$為實數，交點為$K\left(3,\frac{3}{2},3\right)$，

與$\overleftrightarrow{BC}$：$\begin{cases}x=3\\y=\ell\\z=0\end{cases}$，$\ell$為實數，交點為$L(3,0,0)$



(得四邊形四頂點得3分)

得$\overrightarrow{KL}=\left(0,-\frac{3}{2},-3\right)$，$\overrightarrow{NM}=\left(0,-\frac{3}{2},-3\right)$

$\therefore$由$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$，得四邊形$KLMN$為平行四邊形　(2分)

令$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{KL}=\left(0,-\frac{3}{2},-3\right)$，$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{KN}=\left(-3,\frac{3}{2},0\right)$

則四邊形$KLMN$面積為$\sqrt{|\overrightarrow{u}|^2|\overrightarrow{v}|^2-|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{4}+9\right)^2-\left(-\frac{9}{4}\right)^2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$。　(2分)

二、(1) $A'(6, 15)$，$B'(-5, -17)$；(2) 3；(3) $\frac{35}{4}$

出處：第四冊第三章〈矩陣〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：能了解線性變換及期望值的計算

解析：(1) A' 點坐標：$\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}$，　(1 分)

B' 點坐標：$\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\-17\end{bmatrix}$。　(1 分)

〈另解〉

由 $\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -5\\15 & -17\end{bmatrix}$，可得 $A'(6, 15)$，$B'(-5, -17)$。　(各 1 分)

(2) $\triangle OAB$ 面積為 $\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$，　(1 分)

O' 點坐標：$\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，

$\triangle O'A'B'$ 面積為 $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}6 & -5\\15 & -17\end{vmatrix}\right|=\frac{27}{2}$，　(1 分)

故 $\frac{\triangle O'A'B' \text{ 面積}}{\triangle OAB \text{ 面積}}=3$。　(1 分)

〈另解〉

$\frac{\triangle O'A'B' \text{ 面積}}{\triangle OAB \text{ 面積}}=\frac{|\det M|\cdot\triangle OAB \text{ 面積}}{\triangle OAB \text{ 面積}}=\left|\begin{vmatrix}2 & 1\\5 & 1\end{vmatrix}\right|=3$。　(3 分)

(僅有此關係式得 1 分)

(3)因 $\triangle O'A'B'$ 面積 $=|\det M|\cdot\triangle OAB$ 面積

故隨機變數 $X=\frac{9}{2}\times|\det M|=\frac{9}{2}|x-y|$

其取值為 $X=0$，$\frac{9}{2}\times1$，$\frac{9}{2}\times2$，$\frac{9}{2}\times3$，$\frac{9}{2}\times4$，$\frac{9}{2}\times5$

可得隨機變數 X 的機率分布表如下：

X	0	$\frac{9}{2}\times1$	$\frac{9}{2}\times2$	$\frac{9}{2}\times3$	$\frac{9}{2}\times4$	$\frac{9}{2}\times5$
$P(X)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

故期望值 $E(X)=\frac{1}{36}\left(0\times6+\frac{9}{2}\times10+9\times8+\frac{27}{2}\times6+18\times4+\frac{45}{2}\times2\right)=\frac{35}{4}$。

(有列出詳細表格及期望值 $E(X)$ 算式者，錯一個地方扣 1 分，扣完為止。未列出詳細表格而僅有期望值 $E(X)$ 算式者，答案正確者得 7 分，無部分得分)