臺中市立高級中等學校 107 學年度指定科目第二次聯合複習考試
數學甲考科解析

考試日期：108 年 3 月 12~13 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	4	3	234	125	145	24	235	6	7	2	1	0	1
15	16	17	18	19	20								
6	2	3	–	2	3								

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $120\times\frac{1}{6}+60\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{36}=\frac{365}{18}$

   故選(2)

2. $\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+t\\1+2t\end{bmatrix}$

   $\overrightarrow{OP}=(1,t)$，$\overrightarrow{OQ}=(2+t,1+2t)$

   $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(1,t)\cdot(2+t,1+2t)$

   $=2t^2+2t+2$

   $=2(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}\geq\frac{3}{2}$

   故選(4)

3. O、C_1、A、C' 共線

   $\Rightarrow \overrightarrow{OC'}\,//\,\overrightarrow{OC_1}$

   $\dfrac{\frac{12}{5}}{t}=\frac{4}{3}\Rightarrow t=\frac{9}{5}$

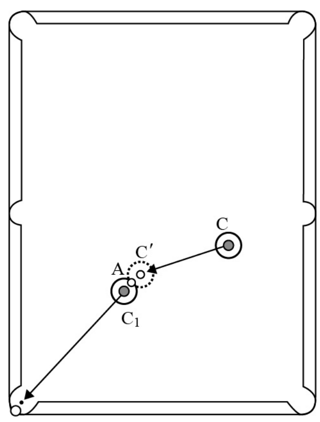
   又觀察可得

   $\overrightarrow{d}\,//\,\overrightarrow{CC'}$

   $\Rightarrow(-21,k)\,//\left(-\frac{21}{5},-\frac{13}{5}\right)$

   $\Rightarrow k=-13$

   故選(3)



二、多選題

4. $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$

   $\cos\theta=\dfrac{(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|\cdot|-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|}$

   $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})=-|\overrightarrow{a}|^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+2|\overrightarrow{b}|^2$

   $=-1+\frac{1}{2}+2\times1=\frac{3}{2}$

   $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=1+2\times\frac{1}{2}+1=3$

   $|-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2-4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4|\overrightarrow{b}|^2=1-4\times\frac{1}{2}+4=3$

   $\cos\theta=\dfrac{(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|\cdot|-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$

   故選(2)(3)(4)

5. 令 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$

   (1) $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}=\left(\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_3&b_1\\c_3&c_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}\right)$

   $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=a_1\times\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}-a_2\times\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}+a_3\times\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}$

   $=a_1\times\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}+a_2\times\begin{vmatrix}b_3&b_1\\c_3&c_1\end{vmatrix}+a_3\times\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}$

   $=\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=6$

   (2) $|\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})|=\left|\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\right|$

   $=\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 所張成的平行六面體體積

   (3) 顯然無此公式

   ＜另解＞

   設 $A(1,0,0)$、$B(0,2,0)$、$C(0,0,3)$

   則$\triangle ABC$ 面積為 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{7}{2}$

   (4) $\begin{vmatrix}a_1+a_1&a_2+a_2&a_3+a_3\\b_1+b_1&b_2+b_2&b_3+b_3\\c_1+d_1&c_2+d_2&c_3+d_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a_1&2a_2&2a_3\\2b_1&2b_2&2b_3\\c_1+d_1&c_2+d_2&c_3+d_3\end{vmatrix}$

   $=\begin{vmatrix}2a_1&2a_2&2a_3\\2b_1&2b_2&2b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2a_1&2a_2&2a_3\\2b_1&2b_2&2b_3\\d_1&d_2&d_3\end{vmatrix}$

   $=2^2\times6+2^2\times0=24$

   (5) 令 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}$，$\Delta_z=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$

   $\Rightarrow\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\d_1&d_2&d_3\end{vmatrix}=0$，

   $\Delta_z=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=6$

   $\Rightarrow$ 方程組無解

   故選(1)(2)(5)

6. 由題意可知

   (1) $f(x)=g(x)Q(x)+3x-2\Rightarrow f(1)=g(1)Q(1)+3-2=1$

   $\Rightarrow g(1)Q(1)=0$

   因為 $Q(x)$ 的係數皆為正，故 $Q(1)>0\Rightarrow g(1)=0$

   (2) $g(1-i)=2\Rightarrow\overline{g(1-i)}=g(\overline{1-i})=g(1+i)=\overline{2}=2$

   表示 $g(x)-2=0$ 有兩根 $1\pm i$

   $\Rightarrow g(x)-2=k(x-1-i)(x-1+i)=k(x^2-2x+2)$

   $g(x)=k(x^2-2x+2)+2\Rightarrow g(1)=0\Rightarrow k+2=0\Rightarrow k=-2$

   $g(x)=-2(x^2-2x+2)+2=-2(x^2-2x+1)=-2(x-1)^2$

   $g(2+i)=-2(1+i)^2=-4i$

   (3) $f(x)=g(x)Q(x)+3x-2=-2(x-1)^2Q(x)+3x-2$

   若 $\alpha<0$，$f(\alpha)=-2(\alpha-1)^2Q(\alpha)+3\alpha-2$

   $\because Q(\alpha)$ 無法判斷正負，故無法確定是否有負根

   (4) $f(0)=-2Q(0)-2<0$，$f(1)=1$

   $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 之間有實根

(5) $f(x)=g(x)Q(x)+3x-2=-2(x-1)^2Q(x)+3x-2$

$\Rightarrow$ $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $3x-2$

故選(1)(4)(5)

7. (1)(2) $\begin{cases}108=k\cdot a^{\frac{100}{100}}\\97.2=k\cdot a^{\frac{200}{100}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0.9\\k=120\end{cases}$

(3) 由圖可知，越往右，下降的趨勢減緩，所以第 150~200 圈所減的公斤數小於第 100~150 圈所減的公斤數

<另解>

$y=120\cdot(0.9)^{\frac{x}{100}}$

第 100~150 圈所減的公斤數為

$120\cdot(0.9)^{\frac{100}{100}}-120\cdot(0.9)^{\frac{150}{100}}=120\cdot(0.9^1-0.9^{1.5})$

第 150~200 圈所減的公斤數為

$120\cdot(0.9)^{\frac{150}{100}}-120\cdot(0.9)^{\frac{200}{100}}=120\cdot(0.9^{1.5}-0.9^2)$

即比較 $0.9^1-0.9^{1.5}$ 與 $0.9^{1.5}-0.9^2$ 之大小

$\because \dfrac{0.9^1-0.9^{1.5}}{1-1.5}<\dfrac{0.9^{1.5}-0.9^2}{1.5-2}$

$\therefore 0.9^1-0.9^{1.5}>0.9^{1.5}-0.9^2$

(4) $x=300$ 代入，$y=120\cdot(0.9)^{\frac{300}{100}}=120\cdot0.729<120\cdot\dfrac{3}{4}=90$

(5) $80>120\cdot(0.9)^{\frac{x}{100}}\Rightarrow\dfrac{2}{3}>(0.9)^{\frac{x}{100}}$

$\Rightarrow \log2-\log3>\dfrac{x}{100}\cdot\log\dfrac{9}{10}$

$\Rightarrow 0.301-0.4771>\dfrac{x}{100}\cdot(2\cdot0.4771-1)$

$\Rightarrow x>\dfrac{17.61}{0.0458}=384.49\cdots$

$\Rightarrow x\ge385$ 始可達成目標！

故選(2)(4)

8. x 截距 $-b$，y 截距 $-\dfrac{b}{a}$，由圖可知 $b<0$，$-\dfrac{b}{a}<0\Rightarrow a<0$

又由圖可知 $\left|-\dfrac{b}{a}\right|>|-b|$

$\Rightarrow \dfrac{b}{a}>-b\Rightarrow b<-ab\Rightarrow b(a+1)<0\Rightarrow a>-1$

故 $-1<a<0$

$x^2+y^2+2bx+2ay-2ab=0\Rightarrow(x+b)^2+(y+a)^2=(a+b)^2$

圓心 $A(-b,-a)$ 在第一象限

又設 $O(0,0)$

$\overline{AO}^2=a^2+b^2<a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=r^2$，

可知圓過第三象限

$d(A,L)=\dfrac{|-b-a^2+b|}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}<1\ (\because -1<a<0)$

由圖形可知，x 截距 $-b>1$

且 $a<0$，$b<0$，故 $|a+b|>1$

$d(A,L)=\dfrac{|-b-a^2+b|}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}<1<|a+b|=r$

可知圓與直線 L 有兩交點

故選(2)(3)(5)

三、選填題

A. 分類討論

①甲抽得 1 白、1 紅，乙抽得 2 紅 $\Rightarrow P_1=\dfrac{C_1^4C_1^6\times C_2^5}{C_2^{10}C_2^8}=\dfrac{4}{21}$

②甲抽得 2 白，乙抽得 2 紅或 1 白 1 紅

$\Rightarrow P_2=\dfrac{C_2^4\times[C_1^2C_1^6+C_2^6]}{C_2^{10}C_2^8}=\dfrac{9}{70}$

故機率為 $\dfrac{4}{21}+\dfrac{9}{70}=\dfrac{67}{210}$

B. $g(x)=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow f(x)+g(x)=2\left[\cos x+\left(\cos x\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin x\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\sqrt{3}\sin x+3\cos x=2\sqrt{3}\cdot\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\because 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\quad\therefore\dfrac{\pi}{3}\le x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow$ 當 $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 時，有最大值 $2\sqrt{3}$

故最高點坐標為 $\left(\dfrac{\pi}{6},2\sqrt{3}\right)$

C. $\begin{vmatrix}a&b&c\\2&1&-1\\-1&3&4\end{vmatrix}=7a-7b+7c=0\Rightarrow a-b+c=0$

$a^2+b^2+c^2-2a=(a-1)^2+b^2+c^2-1$

即先求 (a,b,c) 到 $(1,0,0)$ 距離平方的最小值後再減 1

$\Rightarrow\left(\dfrac{|1-0+0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\right)^2-1=-\dfrac{2}{3}$

<另解>

$[(a-1)^2+b^2+c^2][1^2+(-1)^2+1^2]\ge(a-1-b+c)^2$

$\Rightarrow(a-1)^2+b^2+c^2\ge\dfrac{1}{3}$

所求 $(a-1)^2+b^2+c^2-1\ge-\dfrac{2}{3}$

第貳部分：非選擇題

一、(1) $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$　(2) $z_2=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$　(3) 12

【詳解】

(1) $z_1=1$，$z_2=a+bi$，$z_3=b+ai$ 成等比

故 $(a+bi)^2=b+ai$ (1 分) $\Rightarrow\begin{cases}a^2-b^2=b\\2ab=a\end{cases}$ (1 分)

$\Rightarrow\because a>0\quad\therefore b=\dfrac{1}{2}$，$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (1 分)

(2) $z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　$|z_2|=\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=1$ (1 分)

$z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$ (2 分)

(3) 首項 1，公比 $r=\dfrac{z_2}{z_1}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

$z_1+z_2+\cdots+z_n=\dfrac{1-r^n}{1-r}=0\Rightarrow r^n=1$ (1 分)

$\Rightarrow\cos\dfrac{n\pi}{6}+i\sin\dfrac{n\pi}{6}=0\Rightarrow\dfrac{n\pi}{6}=2k\pi$ (1 分)，$k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow n=12k$

最小正整數 n 為 12(1 分)

二、(1) -8　(2) 3　(3) 0945201314

【詳解】

(1) $y=\dfrac{1}{8}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ (1 分) $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=-8$ (3 分)

(2) $\begin{bmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{23} & a_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{-1}$ (1 分) $\cdot\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ (1 分)

$=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (1 分)

$\therefore a_{31}=3$ (1 分)

(3) 由(2)，$a_{23}=1$ $\quad\because a_{11}=9$

$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & a_{13} \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix}=-1 \Rightarrow a_{13}\cdot a_{21}=10$

$\Rightarrow \begin{cases} a_{13}=2 \\ a_{21}=5 \end{cases}$ (1 分)或 $\begin{cases} a_{13}=5 \\ a_{21}=2 \end{cases}$ (1 分)

①若 $\begin{cases} a_{13}=2 \\ a_{21}=5 \end{cases}$ $\quad\because \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & a_{12} \\ 5 & a_{22} \end{vmatrix}=-8$

$\therefore 9\cdot a_{22}-5\cdot a_{12}=-8 \Rightarrow \begin{cases} a_{12}=7 \\ a_{22}=3 \end{cases}$ $(\because 0\le a_{ij}\le 9)$

但此時 $\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-1$

$\Rightarrow x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{-1}{-8}$ (與題意 $x=\dfrac{1}{2}$ 矛盾)

②若 $\begin{cases} a_{13}=5 \\ a_{21}=2 \end{cases}$ $\quad\because \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & a_{12} \\ 2 & a_{22} \end{vmatrix}=-8$

$\therefore 9\cdot a_{22}-2\cdot a_{12}=-8 \Rightarrow \begin{cases} a_{12}=4 \\ a_{22}=0 \end{cases}$ $(\because 0\le a_{ij}\le 9)$

此時 $\Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-4 \Rightarrow x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{1}{2}$

故所求為 0945201314(2 分)

＜另解＞

由(2)，$a_{23}=1$ $\quad\because a_{11}=9$

$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & a_{13} \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix}=-1 \Rightarrow a_{13}\cdot a_{21}=10$

$\Rightarrow \begin{cases} a_{13}=2 \\ a_{21}=5 \end{cases}$ (1 分)或 $\begin{cases} a_{13}=5 \\ a_{21}=2 \end{cases}$ (1 分)

①若 $\begin{cases} a_{13}=2 \\ a_{21}=5 \end{cases}$ $\quad\because \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & a_{12} \\ 5 & a_{22} \end{vmatrix}=-8$

$\therefore 9\cdot a_{22}-5\cdot a_{12}=-8$

又由(1)，$x=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{-8}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}=-4 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}=-4$

$\Rightarrow 2a_{22}-a_{12}=-4$

解聯立得 $\begin{cases} a_{22}=-12 \\ a_{12}=-20 \end{cases}$ (矛盾)

②若 $\begin{cases} a_{13}=5 \\ a_{21}=2 \end{cases}$ $\quad\because \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & a_{12} \\ 2 & a_{22} \end{vmatrix}=-8$

$\therefore 9\cdot a_{22}-2\cdot a_{12}=-8$

同理，又由(1)

$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}=-4 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}=-4$

$\Rightarrow 5\cdot a_{22}-a_{12}=-4$

解聯立得 $a_{22}=0$, $a_{12}=4$

故所求為 0945201314(2 分)