臺北區高中 108 學年度第二學期指定科目第一次數學甲

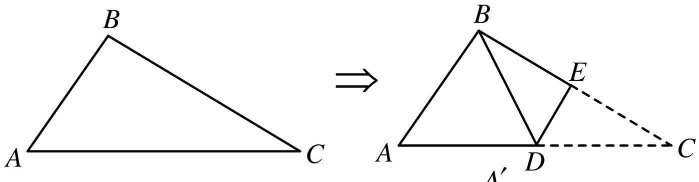
RA5109

第壹部分：選擇題（占 76 分）

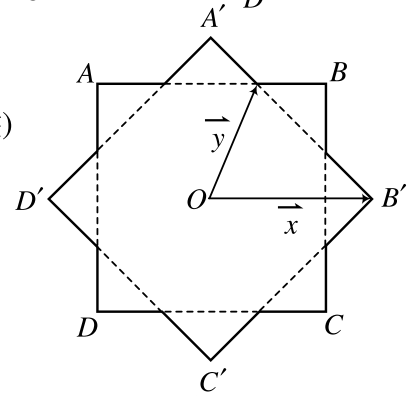
一、單選題（占 24 分）

1. 設 a 為實數，經二階方陣 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換，將坐標平面上的直線 L: $x-2y=1$ 變換成另一條直線 L'，若 L 與 L' 互相垂直，則 a 的值為下列哪一個選項？
(1) -3　(2) -1　(3) 0　(4) 1　(5) 3

2. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$，今將 $\overline{BC}$ 對摺，恰使得 B、C 兩點重合，得摺痕 $\overline{DE}$ 與 $\overline{CA}$ 交於 D，如圖所示。試問 $\cos\angle ABD$ 之值為下列哪一個選項？
(1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$
(3) $\dfrac{1}{2}$　(4) $\dfrac{17}{32}$　(5) $\dfrac{7}{8}$



3. 如圖所示。將正方形 $ABCD$ 以中心點 O 為旋轉中心，順時針旋轉 45° 得另一正方形 $A'B'C'D'$，然後扣除內部 8 條線段(虛線部分)後可以形成一個正八角星(共 16 個頂點)，其中 $\overrightarrow{x}$、$\overrightarrow{y}$ 分別為點 O 盪兩個頂點的向量。若將點 O 到正八角星 16 個頂點的向量都改寫成 $a\overrightarrow{x}+b\overrightarrow{y}$ 的形式，試問滿足 $1<a-b<2$ 的向量有幾個？
(1) 2　(2) 3　(3) 4
(4) 5　(5) 6

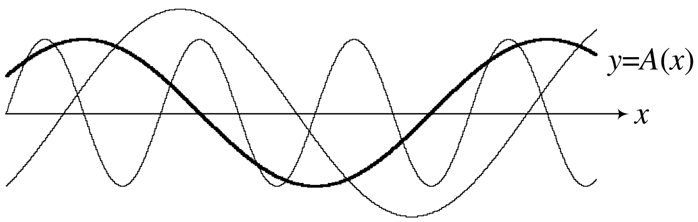


4. 在複數平面上，設 O 為原點，令點 A、B 所對應的複數分別為 z_1、z_2，若 $|z_1-3|=1$，$z_2=(1+i)z_1$，則$\triangle OAB$ 面積的值<u>不可能</u>為下列哪一個選項？
(1) 2　(2) 4　(3) 6　(4) 8　(5) 10

二、多選題（占 40 分）

5. 已知 $a=10^{\sqrt{7}}$，$b=7^{\sqrt{10}}$。試選出正確的選項。
($\log 2\approx 0.3010, \log 3\approx 0.4771, \log 7\approx 0.8451, \sqrt{7}\approx 2.65, \sqrt{10}\approx 3.16$)
(1) $a<500$　(2) $b<500$　(3) $a>b$　(4) a^{10} 是一個 27 位數　(5) $b^{\sqrt{10}}$ 的首位數字為 3

6. 將 $y=f_1(x)=\sin x-\cos x$、$y=f_2(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$、$y=f_3(x)=\sin 3x$ 的函數圖形繪於同一坐標平面上，三個函數圖形與 x 軸的相關位置如圖所示。



試選出正確的選項。
(1) 圖中標示為 $y=A(x)$ 的圖形，所代表的函數為 $y=f_2(x)$
(2) 此三個函數圖形中振幅最大為 $\sqrt{2}$
(3) 令函數 $y=f_2(x)$ 與 $y=f_3(x)$ 的(最小正)週期分別為 P_2、P_3，則 $3P_2=P_3$
(4) 在 $0\le x\le 2\pi$ 的範圍中，$y=f_2(x)$ 與 $y=f_3(x)$ 的函數圖形共有 6 個交點
(5) 在 $0\le x\le 2\pi$ 的範圍中，$|f_1(x)-f_2(x)|$ 的最大值為 $\sqrt{2}+1$

7. 袋子裡裝有大小規格相同的 2 顆白球與 1 顆紅球，今從袋中隨機抽出一球，記錄球的顏色後放回袋中，稱為一次。若連續進行 n 次(n 為任意正整數)，假設出現偶數次白球的機率為 $P(n)$，奇數次白球的機率為 $Q(n)$。試選出正確的選項。

(1) $P(n)+Q(n)=1$　(2) $P(2)-Q(2)=\dfrac{1}{3}$　(3) $P(3)-Q(3)=\dfrac{1}{27}$

(4) $P(4)-Q(4)=\dfrac{1}{81}$　(5) $P(2020)<\dfrac{1}{2}$

8. 在坐標平面上，設圓 Γ： $x^2+y^2-2x+2y-2=0$ 的圓心為 C，已知由直線 L： $3x-4y+18=0$ 上一點 P 向圓 Γ 可作兩條切線 L_1 與 L_2，且直線 L 恰為 L_1 與 L_2 其中一夾角的角平分線。試選出正確的選項。

(1) 直線 L 與圓 Γ 不相交　(2) 直線 PC 與直線 L 互相垂直

(3) 直線 L_1 與直線 L_2 互相垂直　(4) P 點的坐標為 $(-3,2)$

(5) 若圓 Γ 上任一點關於直線 $ax-by-15=0$ 的對稱點均仍然在圓 Γ 上，則 $a+b=0$

9. 給定空間中平面 E： $2x-y-3z=2$ 與直線 L_1: $x-1=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{2}$ 、 L_2: $x-2=\dfrac{y+1}{k}=z-1$ (其中 $k\neq 0$)。試選出正確的選項。

(1) 平面 E 與直線 L_1 恰交於一點　(2) 存在實數 k，使得直線 L_2 垂直平面 E

(3) 存在實數 k，使得直線 L_2 與平面 E 沒有交點

(4) 存在實數 k，使得直線 L_1 與直線 L_2 的公垂線垂直平面 E

(5) 存在實數 k，使得直線 L_1 與直線 L_2 有交點

三、選填題（占 12 分）

A. 在實數線上，有一動點 A 每次移動 1 個單位，且往左與往右的機率相等。今對動點 A 進行觀察，若 A 從坐標為 1 處開始移動，總共移動三次，計算 A 在這三次移動所停的坐標數字總和，則數字總和的期望值為__________。

B. 空間中有 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 兩個非零向量。已知 $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\sqrt{3}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$ 且向量 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 平分 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角。若 $|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|=4$，則 $|\overrightarrow{b}|=$__________。(化為最簡根式)

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

一、在坐標平面上，已知 $A=\dfrac{1}{25}\begin{bmatrix}-7 & 24\\ 24 & 7\end{bmatrix}$ 是以直線 L 為鏡射軸的鏡射矩陣，若對於平面上任一點 P，設 Q 為 P 點經 A 變換後所對應的點。試回答下列問題：

(1) 試求 x 軸經 A 變換後的直線方程式。(3 分)

(2) 試求鏡射軸 L 的直線方程式。(4 分)

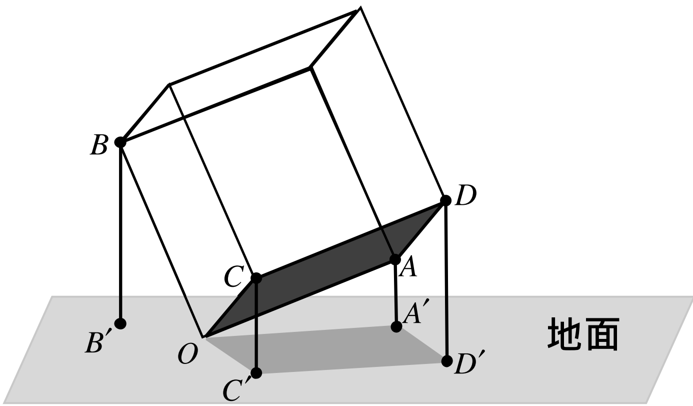
(3) 若 P 為圖形 $(x-2)^2+y^2=1$ 上的一個動點，試求 $\overline{PQ}$ 的最大值。(4 分)

二、用 12 根鋼條架構出一個正六面體的裝置藝術，並在其底面裝上不透明的灰色面板 $OADC$。今將其斜立在公園的平地上，如圖所示。為了穩固此裝置藝術，除了將 O 點落在地面上，還在 A、B、C、D 四處各架上一根垂直地面的鐵柱，分別為 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 與 $\overline{DD'}$。已知此正六面體的邊長為 7 公尺，且 $\overline{AA'}$ 的長為 2 公尺，$\overline{CC'}$ 的長為 3 公尺。試回答下列問題：

(1) 試問鐵柱 $\overline{DD'}$ 的長為多少公尺？(3 分)

(2) 試問地面上的平行四邊形 $OA'D'C'$ 的面積為多少平方公尺？(5 分)

(3) 試問鐵柱 $\overline{BB'}$ 的長為多少公尺？(5 分)



RA5109　臺北區高中 108 學年度第二學期指定科目第一次數學甲
參考答案

選擇題：**1.** (1)　**2.** (1)　**3.** (2)　**4.** (5)　**5.** (1)(2)(4)　**6.** (1)(2)(4)　**7.** (1)(4)　**8.** (1)(2)　**9.** (1)(5)

選填題：**A.** 3　**B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

非選擇題：一、(1) $24x+7y=0$　(2) $4x-3y=0$　(3) $\frac{26}{5}$

二、(1) 5 公尺　(2) 42 平方公尺　(3) 6 公尺