數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(1)	(1)	(2)	(5)	(1)(2)(4)	(1)(2)(4)	(1)(4)	(1)(2)	(1)(5)

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (1)

難易度：易

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：平面上的線性變換與二階方陣

解析：令 (x,y) 為 $L：x-2y=1$ 上的任意一點，且其對應到 L' 上的點為 (x',y')

則 $\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+ay=x'\\2y=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'-\dfrac{a}{2}y'\\y=\dfrac{1}{2}y'\end{cases}$ 代回 $L：x-2y=1$

得 $\left(x'-\dfrac{a}{2}y'\right)-2\left(\dfrac{1}{2}y'\right)=1\Rightarrow L'：x'+\left(-\dfrac{a}{2}-1\right)y'=1$

因為 L 與 L' 互相垂直，所以 $-\dfrac{a}{2}-1=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=-3$

故選(1)。

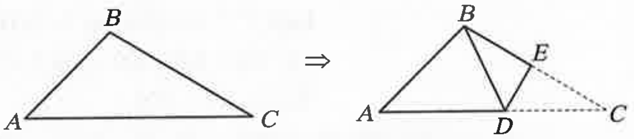
2. (1)

難易度：易

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：利用餘弦定理與差角公式求值

解析：由題圖可知，$\angle DBE=\angle DCE=\angle ACB$



所以 $\cos\angle ABD=\cos(\angle ABC-\angle DBE)$

$=\cos(\angle ABC-\angle ACB)$

由餘弦定理得知

$\cos\angle ABC=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}=-\dfrac{1}{4}$，則 $\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos\angle ACB=\dfrac{3^2+4^2-2^2}{2\times3\times4}=\dfrac{7}{8}$，則 $\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

由差角公式可得

$\cos(\angle ABC-\angle ACB)=\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times\dfrac{7}{8}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}=\dfrac{1}{4}$

故 $\cos\angle ABD=\dfrac{1}{4}$

故選(1)。

3. (2)

難易度：中

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：圖解向量的線性組合

解析：如圖所示，因為 $\overrightarrow{y}$ 與 $\overrightarrow{z}$ 等長且反向，

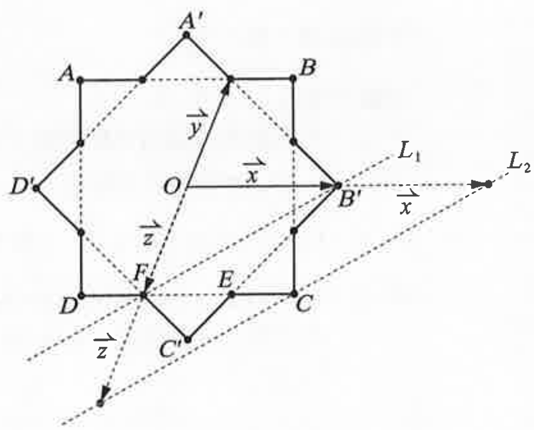
所以 $a\overrightarrow{x}+b\overrightarrow{y}=a\overrightarrow{x}+(-b)\overrightarrow{z}$。

所求 $a-b=a+(-b)$ 為 $\overrightarrow{x}$ 與 $\overrightarrow{z}$ 的線性組合中係數積的總和。

由圖知，終點落在直線 L_1 上的向量皆滿足 $a+(-b)=1$，

若設 $\overline{EC}=1$，則正方形邊長 $\overline{DC}=2+\sqrt{2}$。

又 $\overline{OB'}$ 為正方形對角線長的一半，



所以$\overline{OB'}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{DC}=1+\sqrt{2}=\overline{FC}$ 。

因此$\overline{OB'}$與$\overline{FC}$為平行且等長的線段，即$\overrightarrow{OC}$ 滿足 $a+(-b)=2$。
由圖知，終點落在直線 L_2 上的向量皆滿足 $a+(-b)=2$。
此外，因為$\overline{CC'}//\overline{DB'}$ ，所以點 C' 位在 L_1 與 L_2 之間，滿足 $1<a+(-b)<2$。
因此，介於直線 L_1 與 L_2 之間的頂點有 3 個。
故選(2)。

4. (5)

難易度：中
出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉
目標：複數的幾何意義
解析：z_1 落在以 (3 , 0) 為圓心，1 為半徑的圓上

$z_2=(1+i)\,z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)z_1 \Rightarrow |\,z_2\,|=\sqrt{2}\,|\,z_1\,|$ 且 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{4}$

$\triangle OAB$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\,|\,z_1\,|\cdot|\,z_2\,|\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\,|\,z_1\,|^2$

又 $2\le|\,z_1\,|\le4$，故 $2\le\triangle OAB$ 面積≤8
故選(5)。

二、多選題

5. (1)(2)(4)

難易度：中
出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉
目標：常用對數與首數、尾數的應用
解析：(1) ○(2) ○(3) ╳：$\log(10^{\sqrt{7}})=\sqrt{7}\approx2.65$

$\log(7^{\sqrt{10}})=\sqrt{10}\log7\approx3.16\times0.8451\approx2.670516$

$\log500=\log1000-\log2\approx3-0.3010=2.699$

所以 $a<b<500$

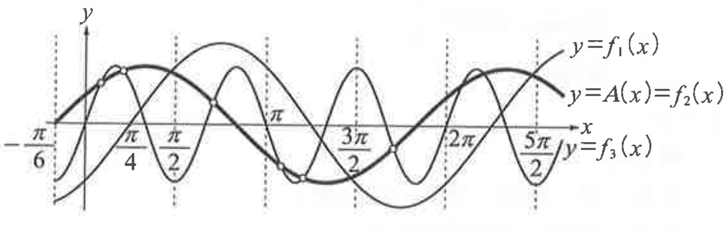
(4) ○：$\log a^{10}=\log10^{10\sqrt{7}}=10\sqrt{7}\approx26.5$，首數 26，$a^{10}$ 是一個 27 位數
(5) ╳：$\log b^{\sqrt{10}}=\log(7^{\sqrt{10}})^{\sqrt{10}}=10\log7\approx8.451=0.451+8$，尾數 0.451
由 $\log2<0.451<\log3$，得知首位數字為 2
故選(1)(2)(4)。

6. (1)(2)(4)

難易度：中
出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉
目標：辨別三角函數疊合、平移、伸縮後的圖形
解析：$f_1(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$f_2(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$f_3(x)=\sin3x$



可得知 $f_1(x)$、$f_2(x)$、$f_3(x)$ 的(最小正)週期
分別為 2π、2π、$\dfrac{2\pi}{3}$，
振幅分別為 $\sqrt{2}$ 、1、1
(1) ○：由振幅與週期可判斷圖形 $y=A(x)$ 所代表的函數為 $y=f_2(x)$
(2) ○：三個函數圖形中振幅最大為 $\sqrt{2}$
(3) ╳：已知 $P_2=2\pi$，$P_3=\dfrac{2\pi}{3}$ ，故 $P_2=3P_3$
(4) ○：在 $0\le x\le2\pi$ 的範圍中，$y=f_2(x)$ 與 $y=f_3(x)$ 的函數圖形如圖所示
可判斷出交點個數共有 6 個

(5) ╳：在 $0\leq x\leq 2\pi$ 的範圍中，$y=f_1(x)$ 與 $y=f_2(x)$ 的函數圖形如圖所示

此範圍中，$f_1(x)$ 的最大值為 $f_1\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，最小值為 $f_1\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$

此範圍中，$f_2(x)$ 的最大值為 $f_2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，最小值為 $f_2\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)=-1$

可得知 $\left|f_1(x)-f_2(x)\right|$ 的最大值不可能為 $\sqrt{2}+1$

故選(1)(2)(4)。

7. (1)(4)

難易度：中

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：獨立事件與重複試驗

解析：(1) ○：因為出現偶數次或奇數次白球為全事件，所以 $P(n)+Q(n)=1$。

(2) ╳：每次出現白球、紅球的機率分別為 $\dfrac{2}{3}$、$\dfrac{1}{3}$

$$P(2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$$Q(2)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}\text{，}P(2)-Q(2)=\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$$

(3) ╳：$P(3)=C^3_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)+C^3_0\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{13}{27}$

$$Q(3)=1-P(3)=1-\frac{13}{27}=\frac{14}{27}\text{，}P(3)-Q(3)=-\frac{1}{27}=-\frac{1}{3^3}$$

(4) ○：$P(4)=C^4_4\left(\dfrac{2}{3}\right)^4+C^4_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+C^4_0\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{41}{81}$

$$Q(4)=1-P(4)=\frac{40}{81}\text{，}P(4)-Q(4)=\frac{1}{81}=\frac{1}{3^4}$$

(5) ╳：由上面規則得知，$P(n)-Q(n)=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

由 $P(2020)-Q(2020)=\dfrac{1}{3^{2020}}$ 且 $P(2020)+Q(2020)=1$，推論 $P(2020)>\dfrac{1}{2}$

故選(1)(4)。

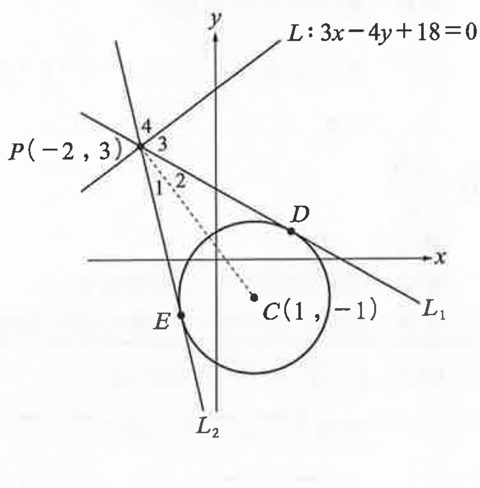
8. (1)(2)

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：圓與直線的關係

解析：如右圖，圓 Γ 為 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$，圓心 $C(1,-1)$，半徑 2



(1) ○

(2) ○：因為過 P 向圓 Γ 作兩切線 L_1 與 L_2，所以 $\angle 1=\angle 2$

因為直線 L 為 L_1 與 L_2 其中一夾角的角平分線，

所以 $\angle 3=\angle 4$

又 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ \Rightarrow \angle 2+\angle 3=90^\circ$

故 $\overleftrightarrow{PC}$ 與直線 L 互相垂直

(3) ╳：設 L_1 與 L_2 分別切圓 Γ 於 D、E

因為 $\overleftrightarrow{PC}$ 與直線 L 互相垂直

所以點 P 到圓心 C 的距離為 $d(C,L)=\dfrac{|3+4+18|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$

又 $\overline{CD}=$ 半徑 2，所以 $\angle 1=\angle 2\neq 45^\circ$，故 L_1 與 L_2 不互相垂直

(4)╳：點 P 為圓心 $C(1,-1)$ 在 $L：3x-4y+18=0$ 上的垂足
令 $P(1+3t,-1-4t)$ 代入 $L：3x-4y+18=0$
$\Rightarrow 3(1+3t)-4(-1-4t)+18=0 \Rightarrow t=-1 \quad \therefore P(-2,3)$
(5)╳：因為直線 $ax-by-15=0$ 為過圓心 $C(1,-1)$ 的直線，所以 $a+b=15\neq 0$
故選(1)(2)。

9. (1)(5)
難易度：難
出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉
目標：能使用向量判別空間中直線與平面的關係
解析：平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n}=(2,-1,-3)$，直線 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(1,3,2)$，直線 L_2 的方向向量 $\overrightarrow{v_2}=(1,k,1)$
(1)○：因為 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v_1}=(2,-1,-3)\cdot(1,3,2)=-7\neq 0$，所以平面 E 與直線 L_1 恰有一個交點
(2)╳：直線 L_2 垂直平面 $E \Leftrightarrow \overrightarrow{v_2} \,/\!/\, \overrightarrow{n} \Leftrightarrow \dfrac{2}{1}=\dfrac{-1}{k}=\dfrac{-3}{1}$，但 $\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{-3}{1}$
(3)╳：由對稱比例式知直線 L_2 必過點 $(2,-1,1)$，且點 $(2,-1,1)$ 落在平面 E 上
即直線 L_2 與平面 E 必有交點 $(2,-1,1)$
(4)╳：直線 L_1 與直線 L_2 的公垂線方向向量為 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=(1,3,2)\times(1,k,1)=(3-2k,1,k-3)$，
若此公垂線垂直平面 E，則 $\overrightarrow{v} \,/\!/\, \overrightarrow{n} \Leftrightarrow \dfrac{3-2k}{2}=\dfrac{1}{-1}=\dfrac{k-3}{-3}$，

$$但\begin{cases}\dfrac{3-2k}{2}=\dfrac{1}{-1}\Rightarrow k=\dfrac{5}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{-1}=\dfrac{k-3}{-3}\Rightarrow k=6\end{cases}，矛盾$$

(5)○：L_1 的參數式為 $\begin{cases}x=1+t\\ y=-1+3t\\ z=-2+2t\end{cases}$，$t\in R$，$L_2$ 的參數式為 $\begin{cases}x=2+s\\ y=-1+ks\\ z=1+s\end{cases}$，$s\in R$

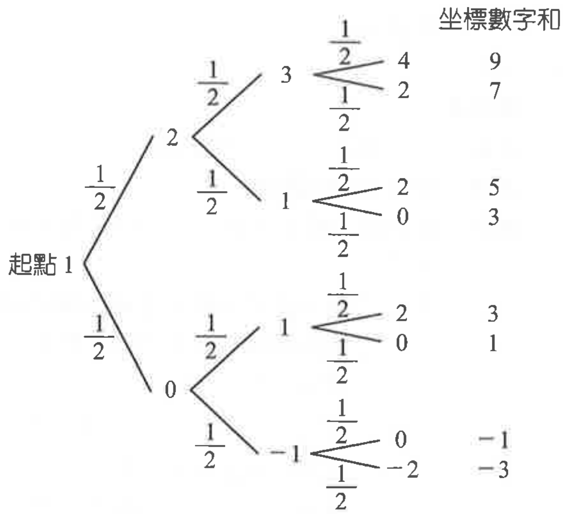
$$令\begin{cases}1+t=2+s\\ -1+3t=-1+ks\\ -2+2t=1+s\end{cases}，解出\begin{cases}t=2\\ s=1\\ k=6\end{cases}$$

故選(1)(5)。

三、選填題

A. 3
難易度：易
出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉
目標：樹狀圖與期望值
解析：畫出樹狀圖如右圖

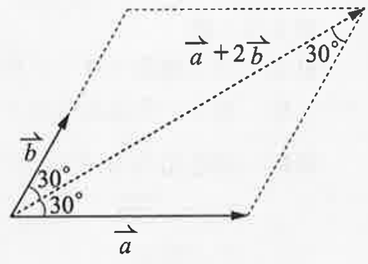
$$則期望值為\left(\frac{1}{2}\right)^3\times〔9+7+5+3+3+1+(-1)+(-3)〕$$
$=3$。



B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
難易度：中
出處：第四冊第一章〈空間向量〉
目標：圖解向量內積、外積的幾何意義
解析：設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ
因為 $\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{3}\,(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$
$\Rightarrow\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\sin\theta=\sqrt{3}\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta$
$\Rightarrow \tan\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=60^\circ$
又 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 平分 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角，所以 $\left|\overrightarrow{a}\right|=2\left|\overrightarrow{b}\right|$。

〔解法一〕

如圖所示，$2\left(\left|\overrightarrow{a}\right|\cos 30^\circ\right)=\left|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right|=4\Rightarrow\left|\overrightarrow{a}\right|=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，



所以 $\left|\overrightarrow{b}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。

〔解法二〕

因為 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos 60^\circ=\left|\overrightarrow{b}\right|^2$，

所以 $\left|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right|^2=16\Rightarrow(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})=16$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{a}\right|^2+4\left|\overrightarrow{b}\right|^2+4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=16$

$\Rightarrow 12\left|\overrightarrow{b}\right|^2=16\Rightarrow\left|\overrightarrow{b}\right|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $24x+7y=0$；(2) $4x-3y=0$；(3) $\dfrac{26}{5}$

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：平面上的線性變換與二階方陣

解析：(1)令 x 軸上任一點為 $(t,0)$

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix}-7&24\\24&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}-7t\\24t\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{7}{25}t\\[2mm]y=\dfrac{24}{25}t\end{cases}$$

$\Rightarrow\dfrac{x}{y}=-\dfrac{7}{24}$

$\Rightarrow 24x+7y=0$。

(2)〔解法一〕

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix}-7&24\\24&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta&\sin 2\theta\\\sin 2\theta&-\cos 2\theta\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow\begin{cases}\sin 2\theta=\dfrac{24}{25}\\[2mm]\cos 2\theta=-\dfrac{7}{25}\end{cases}$，由 $\cos 2\theta=-\dfrac{7}{25}$

$\Rightarrow\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{7}{25}}{2}}=\pm\dfrac{3}{5}$

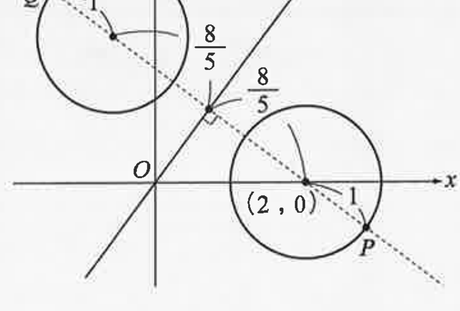
又 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta>0$ 且 $\sin\theta>0$

所以 $\cos\theta>0$，取 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\tan\theta=\dfrac{4}{3}$

得 $y=\dfrac{4}{3}x$，直線 L 為 $y=\dfrac{4}{3}x$ 或寫成 $4x-3y=0$。

〔解法二〕

任找一點 $P(7,1)$，經 A 變換後為 $Q(-1,7)$，求出 $\overline{PQ}$ 的中垂線 $y=\dfrac{4}{3}x$。



(3)圓心 $(2,0)$ 到 $4x-3y=0$ 的距離為 $\dfrac{|4\times2-3\times0|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{8}{5}$

$\overline{PQ}$ 的最大值為 $\dfrac{8}{5}\times2+2=\dfrac{26}{5}$。

二、(1) 5 公尺；(2) 42 平方公尺；(3) 6 公尺

難易度：難

出處：第三冊第一章〈三角〉、第四冊第一章〈空間向量〉

目標：善用三角運算與空間向量運算解決生活情境中的面積問題與長度問題

解析：設地面為 xy 平面且 $\overrightarrow{OC}=(x_1, y_1, 3)$，$\overrightarrow{OA}=(x_2, y_2, 2)$

(1)因為 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=(x_1+x_2, y_1+y_2, 5)$，所以 D 點到地面的垂直距離為 5 公尺。

(2)〔解法一〕

因為 $\left|\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}\right|=7$，所以 $\begin{cases} x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=40 \\ x_2^{\,2}+y_2^{\,2}=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{OC'}\right|=\sqrt{40} \\ \left|\overrightarrow{OA'}\right|=\sqrt{45} \end{cases}$

又因為 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，推得 $x_1x_2+y_1y_2=-6\Rightarrow\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{OA'}=-6$

所以平行四邊形 $OA'D'C'$ 面積 $=\sqrt{\left|\overrightarrow{OA'}\right|^2\left|\overrightarrow{OC'}\right|^2-(\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OC'})^2}=42$ (平方公尺)。

〔解法二〕

在 $\triangle OCC'$ 與 $\triangle OAA'$ 中，由畢氏定理知 $\overline{OC'}=\sqrt{7^2-3^2}=\sqrt{40}$，$\overline{OA'}=\sqrt{7^2-2^2}=\sqrt{45}$

因為 $CC'A'A$ 為梯形，所以此梯形的高 $\overline{A'C'}=\sqrt{(7\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{97}$

設 $\angle C'OA'=\theta$，得 $\cos\theta=\dfrac{\overline{OA'}^2+\overline{OC'}^2-\overline{A'C'}^2}{2\overline{OA'}\cdot\overline{OC'}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

所求平行四邊形 $OA'D'C'$ 面積 $=\overline{OC'}\times\overline{OA'}\times\sin\theta=42$ (平方公尺)。

(3)〔解法一〕

因為 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OA}$ 且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=7$，所以 $\left|\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\right|=7\times7=49$

又因為 $\overrightarrow{OB}$ 為 $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 的公垂向量且 $\left|\overrightarrow{OB}\right|=7$

所以 $\overrightarrow{OB}=\dfrac{\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\right|}\times7=\dfrac{(3y_1-2y_2, 2x_2-3x_1, x_1y_2-x_2y_1)}{49}\times7$

所求 $\overline{BB'}=\dfrac{|x_1y_2-x_2y_1|}{7}=\dfrac{1}{7}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{7}\times$平行四邊形 $OA'D'C'$ 面積值 $=\dfrac{1}{7}\times42=6$ (公尺)。

〔解法二〕

設地面上 O 為原點，點 C' 在 x 軸正向上。因為 $\overline{OC}=7$，所以 $\overrightarrow{OC}=(2\sqrt{10}, 0, 3)$。

因為 $\overline{OA}\perp\overline{OC}$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$，即 $2\sqrt{10}\times x_2+6=0\Rightarrow x_2=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$；

因為 $\overline{OA}=7$，所以 $x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+4=49\Rightarrow\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2+y_2^{\,2}=45\Rightarrow y_2=\dfrac{21}{\sqrt{10}}$，

所以 $\overrightarrow{OA}=\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}, \dfrac{21}{\sqrt{10}}, 2\right)$。

因為 $\overrightarrow{OB}$ 垂直 $\overrightarrow{OC}$ 亦垂直 $\overrightarrow{OA}$，所以 $\overrightarrow{OB}\,//\left(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\right)=\left(-\dfrac{63}{\sqrt{10}}, \dfrac{49}{\sqrt{10}}, 42\right)$，

又 $\left|\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\right|=7\times7=49$ 且 $\left|\overrightarrow{OB}\right|=7$，所以 $\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{7}\left(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\right)=\left(-\dfrac{9}{\sqrt{10}}, -\dfrac{7}{\sqrt{10}}, 6\right)$，

所求 $\overline{BB'}=6$ (公尺)。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1) $24x+7y=0$；(2) $4x-3y=0$；(3) $\frac{26}{5}$

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：平面上的線性變換與二階方陣

解析：(1)令 x 軸上任一點為 $(t,0)$

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix}-7 & 24\\ 24 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}-7t\\ 24t\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{7}{25}t\\ y=\frac{24}{25}t\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{y}=-\frac{7}{24}$$

$\Rightarrow 24x+7y=0$。(3 分)

(2)〔解法一〕

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix}-7 & 24\\ 24 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}\quad (1\text{ 分})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin 2\theta=\frac{24}{25}\\ \cos 2\theta=-\frac{7}{25}\end{cases}\text{，由 }\cos 2\theta=-\frac{7}{25}$$

$$\Rightarrow\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}}=\pm\frac{3}{5}$$

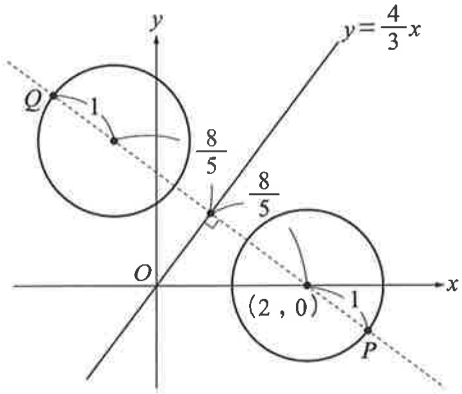
又 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta>0$ 且 $\sin\theta>0$

所以 $\cos\theta>0$，取 $\cos\theta=\frac{3}{5}\Rightarrow\tan\theta=\frac{4}{3}$

得 $y=\frac{4}{3}x$，直線 L 為 $y=\frac{4}{3}x$ 或寫成 $4x-3y=0$。(3 分)

〔解法二〕

任找一點 $P(7,1)$，經 A 變換後為 $Q(-1,7)$，求出 $\overline{PQ}$ 的中垂線 $y=\frac{4}{3}x$。(4 分)



(3)圓心 $(2,0)$ 到 $4x-3y=0$ 的距離為 $\frac{|4\times2-3\times0|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{8}{5}$ (2 分)

$\overline{PQ}$ 的最大值為 $\frac{8}{5}\times2+2=\frac{26}{5}$。(2 分)

二、(1) 5 公尺；(2) 42 平方公尺；(3) 6 公尺

難易度：難

出處：第三冊第一章〈三角〉、第四冊第一章〈空間向量〉

目標：善用三角運算與空間向量運算解決生活情境中的面積問題與長度問題

解析：設地面為 xy 平面且 $\overrightarrow{OC}=(x_1,y_1,3)$，$\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,2)$

(1)因為 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=(x_1+x_2,y_1+y_2,5)$，所以 D 點到地面的垂直距離為 5 公尺。(3 分)

(2)〔解法一〕

因為 $\left|\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}\right|=7$，所以 $\begin{cases}x_1^2+y_1^2=40\\ x_2^2+y_2^2=45\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left|\overrightarrow{OC'}\right|=\sqrt{40}\\ \left|\overrightarrow{OA'}\right|=\sqrt{45}\end{cases}$

又因為 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，推得 $x_1x_2+y_1y_2=-6\Rightarrow\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{OA'}=-6$ (3 分)

所以平行四邊形 $OA'D'C'$ 面積 $=\sqrt{\left|\overrightarrow{OA'}\right|^2\left|\overrightarrow{OC'}\right|^2-(\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OC'})^2}=42$ (平方公尺)。(2 分)

〔解法二〕

在△OCC'與△OAA'中，由畢氏定理知 $\overline{OC'}=\sqrt{7^2-3^2}=\sqrt{40}$ ，$\overline{OA'}=\sqrt{7^2-2^2}=\sqrt{45}$

因為 $CC'A'A$ 為梯形，所以此梯形的高 $\overline{A'C'}=\sqrt{(7\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{97}$

設 $\angle C'OA'=\theta$，得 $\cos\theta=\dfrac{\overline{OA'}^2+\overline{OC'}^2-\overline{A'C'}^2}{2\overline{OA'}\cdot\overline{OC'}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$　(3 分)

所求平行四邊形 $OA'D'C'$ 面積$=\overline{OC'}\times\overline{OA'}\times\sin\theta=42$ (平方公尺)。(2 分)

(3)〔解法一〕

因為 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OA}$ 且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=7$，所以 $\left|\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\right|=7\times7=49$

又因為 $\overrightarrow{OB}$ 為 $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 的公垂向量且 $\left|\overrightarrow{OB}\right|=7$

所以 $\overrightarrow{OB}=\dfrac{\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\right|}\times7=\dfrac{(3y_1-2y_2\,,\,2x_2-3x_1\,,\,x_1y_2-x_2y_1)}{49}\times7$　(3 分)

所求 $\overline{BB'}=\dfrac{\left|x_1y_2-x_2y_1\right|}{7}=\dfrac{1}{7}\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{7}\times$平行四邊形 $OA'D'C'$ 面積值

$=\dfrac{1}{7}\times42=6$ (公尺)。(2 分)

〔解法二〕

設地面上 O 為原點，點 C' 在 x 軸正向上。因為 $\overline{OC}=7$，所以 $\overrightarrow{OC}=(2\sqrt{10}\,,0\,,3\,)$。

因為 $\overline{OA}\perp\overline{OC}$ ，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$，即 $2\sqrt{10}\times x_2+6=0\Rightarrow x_2=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ ；

因為 $\overline{OA}=7$，所以 $x_2{}^2+y_2{}^2+4=49\Rightarrow\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2+y_2{}^2=45\Rightarrow y_2=\dfrac{21}{\sqrt{10}}$ ，

所以 $\overrightarrow{OA}=\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}},\dfrac{21}{\sqrt{10}},2\right)$。(3 分)

因為 $\overrightarrow{OB}$ 垂直 $\overrightarrow{OC}$ 亦垂直 $\overrightarrow{OA}$ ，所以 $\overrightarrow{OB}\,//\left(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\right)=\left(-\dfrac{63}{\sqrt{10}},\dfrac{49}{\sqrt{10}},42\right)$，

又 $\left|\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\right|=7\times7=49$ 且 $\left|\overrightarrow{OB}\right|=7$，所以 $\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{7}\left(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\right)=\left(-\dfrac{9}{\sqrt{10}},-\dfrac{7}{\sqrt{10}},6\right)$，

所求 $\overline{BB'}=6$ (公尺)。(2 分)