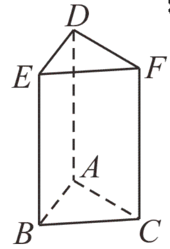
# 108 學年度全國高級中學指定科目第五次模擬考數學甲(108-E5)

RA5110

**第壹部分：選擇題（占 76 分）**

**一、單選題（占 24 分）**




1. 右圖是底面為正三角形之直三角柱，已知 $\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=10$，則 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的值為下列哪一個選項？
(1) $46$　(2) $60$　(3) $82$　(4) $100$　(5) $118$。

2. 某保險箱使用六位數字密碼，保險箱被設定若連續兩次輸入錯誤就會鎖住無法開啟，已知六位數字密碼由 $1$、$3$、$5$、$7$ 這四個數字組成，主人忘了哪些數字有重複也忘記數字的排列順序，因此決定亂猜，且如果第一次猜錯就會換一組密碼再試第二次，則保險箱被打開的機率為下列哪一個選項？
(1) $\frac{1}{780}$　(2) $\frac{1}{1080}$　(3) $\frac{1}{1024}$　(4) $\frac{1}{1560}$　(5) $\frac{1}{2048}$。

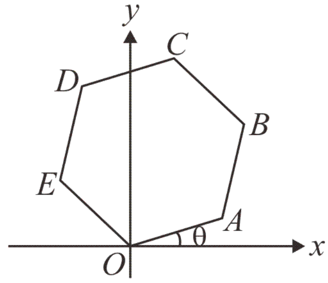
3. 坐標平面上有一點 $A(2,5)$，且點 $A$ 到直線 $L_1$：$2x-y=3$ 與到直線 $L_2$：$3x-2y=0$ 的投影點分別為 $B$ 與 $C$，則 $\Delta ABC$ 之外接圓面積為下列哪一個選項？
(1) $2\pi$　(2) $4\pi$　(3) $6\pi$　(4) $8\pi$　(5) $10\pi$。

4. 設 $a$、$b$ 為實數，複數 $z_1=1+ai$，$z_2=\sqrt{3}+bi$。若 $|z_1|=|z_2|$，且 $\frac{z_1}{z_2}$ 的主輻角為 $\frac{\pi}{2}$，則 $a^2+b$ 的值為下列哪一個選項？(1) $1$　(2) $2$　(3) $3$　(4) $4$　(5) $5$。

**二、多選題（占 24 分）**

5. 已知實係數二次函數 $f(x)=ax^2+bx+a+3$，若對所有實數 $k$，$f(k)>2$ 恆成立，則 $(a,b)$ 可為下列哪些選項？(1) $(-2,2)$　(2) $(1,2)$　(3) $(1,3)$　(4) $(3,\pi)$　(5) $(\sqrt{55},\pi)$。

6. 一顆公正的骰子，六面有兩面是 $1$ 點、兩面是 $2$ 點、一面是 $3$ 點、一面是 $4$ 點。投擲這顆骰子一次並記錄點數；再投擲一次，若點數與第一次不同則記錄之，否則就重新投擲，直到出現與第一次不同的點數才記錄。設第一次記錄的點數為 $X$，第二次記錄的點數為 $Y$。請選出正確的選項：(1) $P(Y=3)=\frac{1}{5}$　(2) $P(X=1|Y=3)=\frac{2}{5}$
(3) $P(X=4|Y=3)=\frac{1}{6}$　(4) $E(X)=\frac{7}{2}$　(5) $E(6X+1)=14$。



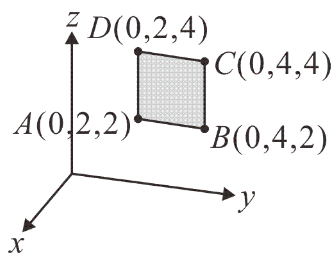

7. 如右圖，坐標平面上，$OABCDE$ 是一個邊長為 $4$ 的正六邊形，若 $O$ 為原點，$\theta$ 為直線 $OA$ 與 $x$ 軸正向的夾角，且 $0°\le\theta\le180°$，請選出正確的選項：
(1) $\overrightarrow{OB}=8(\cos(\theta+30°),\sin(\theta+30°))$　(2) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=48$
(3)當 $\theta=45°$ 時，正六邊形 $OABCDE$ 恰有 $2$ 個頂點落在第二象限
(4)已知 $P(1,-\sqrt{3})$，若 $\theta=15°$，則 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OP}>\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OP}$
(5)已知 $Q(1,1)$，若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}$，則 $\theta=75°$。

**三、選填題（占 28 分）**

A. 已知 $a$ 、 $b$ 為正實數，二階方陣 $A=\begin{bmatrix}-a & b\\ -b & -a\end{bmatrix}$ 且 $a^2+b^2=1$，若 $\left(A+A^{-1}\right)^{10}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，則 $a=$________。（化為最簡分數）

B. 已知 $f(x)=-5+\log\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 與 $g(x)=\log(x-3)$ 的函數圖形交點為 $(\alpha,\beta)$，且 $\alpha$ 介於整數 $k$ 與 $k+1$ 之間，則 $k=$________。

C. 如右圖，在 $yz$ 平面上鋪設四個頂點為 $A(0,2,2)$、$B(0,4,2)$、$C(0,4,4)$ 與 $D(0,2,4)$ 的正方形磁磚，今一雷射光線自點 $(6,-5,2)$ 射出，沿著向量 $(-3,a,5-a)$ 前進，欲使雷射投射的光點落在磁磚鋪設區域（含邊界），則實數 $a$ 的範圍為________。（化為最簡分數）




D. 甲、乙、丙、丁 4 個好朋友相約看熱氣球，先在某定點集合後，甲、乙、丙、丁各自依序往東、南、西、北四個方向移動若干距離後，發現大家看熱氣球的仰角都是 45°，已知甲、乙兩人相距 300 公尺，丙、丁兩人相距 400 公尺，則此時熱氣球的高度為________公尺。

**第貳部分：非選擇題（占 24 分）**

一、 已知$\dfrac{\pi}{6}\le x\le\pi$，若$f\left(x\right)=\sin 2x-3\left(\sin x+\cos x\right)$。

(1)令$\sin x+\cos x=t$，試求$t$的範圍。

(2)當$x=m$時，$f\left(x\right)$有最小值$n$，試求數對$\left(m,n\right)$。

二、在坐標平面上，$O$為原點，考慮二階方陣$T=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$所定義的線性變換，已知$T$的行列式值不為$0$。

(1)設$a=b=1$，$P_0$坐標為$\left(1,0\right)$，若矩陣$T$將點$P_{k-1}$映射到點$P_k$，對所有正整數$k$恆成立，試求$\overline{OP_0}+\overline{OP_1}+\overline{OP_2}+\cdots\cdots+\overline{OP_9}$的值。

(2)若$T^3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，請寫出滿足條件的所有可能的數對$\left(a,b\right)$。

(3)坐標平面上不共線三點$O$、$P$、$Q$，其中$O$為原點，若矩陣$T$在平面上定義的線性變換將$P$、$Q$分別映射到點$P'$、$Q'$，試證明$\Delta OPQ$與$\Delta OP'Q'$相似。

## RA5110　108 學年度全國高級中學指定科目第五次模擬考數學甲 (108-E5)　參考答案

選擇題：1. (3)　2. (1)　3. (4)　4. (2)　5. (2)(4)(5)　6. (1)(3)(5)　7. (2)(5)

選填題：A. $\frac{1}{2}$　B. 3　C. $4 \le a \le \frac{9}{2}$　D. 250

非選擇題：一、(1) $-1 \le t \le \sqrt{2}$　(2) $\left(\frac{\pi}{4}, 1-3\sqrt{2}\right)$

二、(1) $31+31\sqrt{2}$　(2) $(1,0)$，$\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

(3) $\overrightarrow{OP} = r_1(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$，$\overrightarrow{OQ} = r_2(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$，

$\overrightarrow{OP'} = r_1 r(\cos(\theta_1+\theta), \sin(\theta_1+\theta))$，

$\overrightarrow{OQ'} = r_2 r(\cos(\theta_2+\theta), \sin(\theta_2+\theta))$則

$\angle POQ = |\theta_1-\theta_2| = |(\theta_1+\theta)-(\theta_2+\theta)| = \angle P'OQ'$又

$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1 r}{r_2 r} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ'}}$，故$\Delta OPQ \sim \Delta OP'Q'$