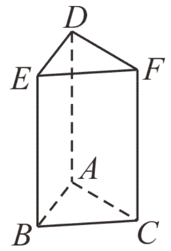
全國高中 109 年(108 學年度)高三下
第五次指考模擬考數學(自然組)(108-E5)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占 76 分）

一、單選題（占 24 分）

1. 右圖是底面為正三角形之直三角柱，已知 $\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=10$，則 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的值為下列哪一個選項？
(1) 46　(2) 60　(3) 82　(4) 100　(5) 118。



答：(3)

解：$A(0,0,0)$，$B(6,0,0)$，$C(3,3\sqrt{3},0)$，$D(0,0,10)$，$F(3,3\sqrt{3},10)$

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BD}=(3,3\sqrt{3},10)\cdot(-6,0,10)=-18+0+100=82$

2. 某保險箱使用六位數字密碼，保險箱被設定若連續兩次輸入錯誤就會鎖住無法開啟，已知六位數字密碼由 1、3、5、7 這四個數字組成，主人忘了哪些數字有重複也忘記數字的排列順序，因此決定亂猜，且如果第一次猜錯就會換一組密碼再試第二次，則保險箱被打開的機率為下列哪一個選項？
(1) $\frac{1}{780}$　(2) $\frac{1}{1080}$　(3) $\frac{1}{1024}$　(4) $\frac{1}{1560}$　(5) $\frac{1}{2048}$。

答：(1)

解：$n(S)=\underbrace{C^4_1\times\frac{6!}{3!}}_{aaabcd\text{型}}+\underbrace{C^4_2\times\frac{6!}{2!2!}}_{aabbcd\text{型}}=480+1080=1560$

$P(A)=\frac{1}{1560}+\frac{1559}{1560}\times\frac{1}{1559}=\frac{2}{1560}=\frac{1}{780}$

3. 坐標平面上有一點 $A(2,5)$，且點 A 到直線 L_1：$2x-y=3$ 與到直線 L_2：$3x-2y=0$ 的投影點分別為 B 與 C，則 ΔABC 之外接圓面積為下列哪一個選項？
(1) 2π　(2) 4π　(3) 6π　(4) 8π　(5) 10π。

答：(4)

解：L_1、L_2 交於 $P(6,9)$

所求外接圓以 $\overline{AP}$ 為直徑：$\overline{AP}=4\sqrt{2}$，故圓面積 $=\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2=8\pi$

4. 設 a、b 為實數，複數 $z_1=1+ai$，$z_2=\sqrt{3}+bi$。若 $|z_1|=|z_2|$，且 $\frac{z_1}{z_2}$ 的主輻角為 $\frac{\pi}{2}$，則 a^2+b 的值為下列哪一個選項？
(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 5。

答：(2)

解：$\dfrac{z_1}{z_2}=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=1(0+i)=i\Rightarrow(1+ai)=i\left(\sqrt{3}+bi\right)\Rightarrow a=\sqrt{3}$，$b=-1$

二、多選題（占 24 分）

5. 已知實係數二次函數 $f(x)=ax^2+bx+a+3$，若對所有實數 k，$f(k)>2$ 恆成立，則 (a,b) 可為下列哪些選項？
(1) $(-2,2)$　(2) $(1,2)$　(3) $(1,3)$　(4) $(3,\pi)$　(5) $\left(\sqrt{55},\pi\right)$。

答：(2)(4)(5)

解：$ak^2+bk+a+3>2\Rightarrow ak^2+bk+(a+1)>0$ 恆成立

條件：$a>0$ 且 $b^2-4a(a+1)<0$

(1) $-2<0$ 不合　　(3) $3^2-4\times1\times2>0$ 不合

6. 一顆公正的骰子，六面有兩面是1點、兩面是2點、一面是3點、一面是4點。投擲這顆骰子一次並記錄點數；再投擲一次，若點數與第一次不同則記錄之，否則就重新投擲，直到出現與第一次不同的點數才記錄。設第一次記錄的點數為 X，第二次記錄的點數為 Y。請選出正確的選項：
(1) $P(Y=3)=\dfrac{1}{5}$　(2) $P(X=1|Y=3)=\dfrac{2}{5}$　(3) $P(X=4|Y=3)=\dfrac{1}{6}$　(4) $E(X)=\dfrac{7}{2}$
(5) $E(6X+1)=14$。

答：(1)(3)(5)

解：(1) $P(Y=3)=P((x=1,Y=3)\cup(X=2,Y=3)\cup(X=4,Y=3))$

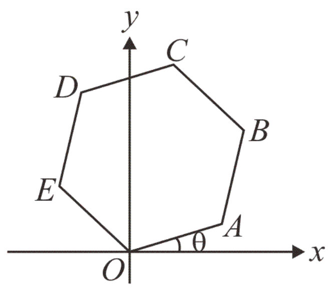
$=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}$

(2) $P(X=1|Y=3)=\dfrac{\frac{2}{6}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{12}$　　(3) $P(X=4|Y=3)=\dfrac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{6}$

(4) $E(X)=1\times\dfrac{2}{6}+2\times\dfrac{2}{6}+3\times\dfrac{1}{6}+4\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{6}$

(5) $E(6X+1)=6E(X)+1=14$

7. 如右圖，坐標平面上，$OABCDE$ 是一個邊長為 4 的正六邊形，若 O 為原點，θ 為直線 OA 與 x 軸正向的夾角，且 $0°\le\theta\le180°$，請選出正確的選項：
(1) $\overrightarrow{OB}=8\left(\cos(\theta+30°),\sin(\theta+30°)\right)$
(2) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=48$
(3) 當 $\theta=45°$ 時，正六邊形 $OABCDE$ 恰有 2 個頂點落在第二象限
(4) 已知 $P\left(1,-\sqrt{3}\right)$，若 $\theta=15°$，則 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OP}>\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OP}$
(5) 已知 $Q(1,1)$，若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}$，則 $\theta=75°$。



答：(2)(5)

解：(1)應為$\overrightarrow{OB}=4\sqrt{3}\left(\cos\left(\theta+30^\circ\right),\sin\left(\theta+30^\circ\right)\right)$

(2)$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=4\sqrt{3}\times8\times\cos30^\circ=48$

(3)應為$C\left(105^\circ\right)$，$D\left(135^\circ\right)$，$E\left(165^\circ\right)\in$第二象限

(4)$\overrightarrow{OP}=2\left(\cos\left(-60^\circ\right),\sin\left(-60^\circ\right)\right)$

$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OP}=4\sqrt{3}\times2\times\cos165^\circ=-8\sqrt{3}\cos15^\circ$（負多，小）

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OP}=4\times2\times\cos195^\circ=-8\cos15^\circ$（負少，大）

(5)$\overrightarrow{OQ}=\sqrt{2}\left(\cos45^\circ,\sin45^\circ\right)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=4\times\sqrt{2}\times\cos\left(\theta-45^\circ\right)$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}=4\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\cos\left(\theta+30^\circ-45^\circ\right)$

$\Rightarrow\cos\left(\theta-45^\circ\right)=\sqrt{3}\cos\left(\theta-15^\circ\right)$，$0^\circ\le\theta\le180^\circ\Rightarrow\theta=75^\circ$

三、選填題（占 28 分）

A. 已知a、b為正實數，二階方陣$A=\begin{bmatrix}-a & b\\ -b & -a\end{bmatrix}$且$a^2+b^2=1$，

若$\left(A+A^{-1}\right)^{10}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，則$a=$________。（化為最簡分數）

答：$\dfrac{1}{2}$

解：$\det A=a^2+b^2=1\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}-a & -b\\ b & -a\end{bmatrix}$

$$\left(A+A^{-1}\right)^{10}=\begin{bmatrix}-2a & 0\\ 0 & -2a\end{bmatrix}^{10}=\begin{bmatrix}1024a^{10} & 0\\ 0 & 1024a^{10}\end{bmatrix}=I$$

$$\xrightarrow{a、b\in R^+,\ a^2+b^2=1}\ \xrightarrow{0<a<1}\ a=\frac{1}{2}$$

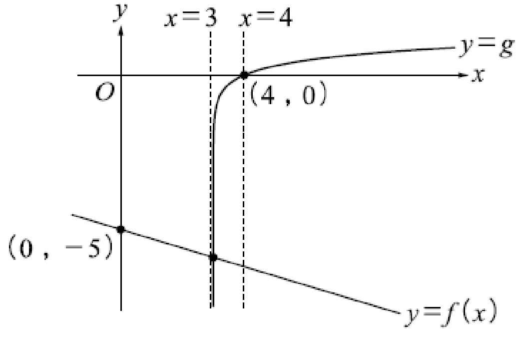
B. 已知$f\left(x\right)=-5+\log\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$與$g\left(x\right)=\log\left(x-3\right)$的函數圖形交點為$\left(\alpha,\beta\right)$，且$\alpha$介於整數$k$與$k+1$之間，則$k=$________。

答：3

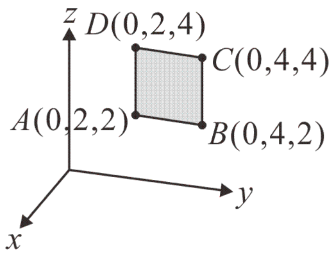
解：$\begin{cases}y=f\left(x\right)=-5-\left(\log2\right)x\\ y=g\left(x\right)=\log\left(x-3\right)\end{cases}$

當$3<x<4$時，兩圖交於唯一交點

$\Rightarrow k=3$



C. 如右圖，在 yz 平面上鋪設四個頂點為 $A(0,2,2)$、$B(0,4,2)$、$C(0,4,4)$與$D(0,2,4)$的正方形磁磚，今一雷射光線自點$(6,-5,2)$射出，沿著向量$(-3,a,5-a)$前進，欲使雷射投射的光點落在磁磚鋪設區域（含邊界），則實數a的範圍為________。（化為最簡分數）



答： $4\le a\le \dfrac{9}{2}$

解： 令雷射光射線路徑為 $\begin{cases} x=6-3t \\ y=-5+at \\ z=2+(5-a)t \end{cases}$，$t\ge 0$

需落在 yz 平面且以 $A(0,2,2)$，$B(0,4,2)$，$C(0,4,4)$，$D(0,2,4)$ 為頂點之正方形中（含邊界）

故可列條件 $\begin{cases} x=0 \\ 2\le y\le 4 \\ 2\le z\le 4 \end{cases}$

$x=0\Rightarrow 6-3t=0\Rightarrow t=2$

$2\le y\le 4\Rightarrow 2\le -5+2a\le 4\Rightarrow \dfrac{7}{2}\le a\le \dfrac{9}{2}$

$2\le z\le 4\Rightarrow 2\le 2+(5-a)\times 2\le 4\Rightarrow 4\le a\le 5$

故a的範圍為$4\le a\le \dfrac{9}{2}$

D. 甲、乙、丙、丁4個好朋友相約看熱氣球，先在某定點集合後，甲、乙、丙、丁各自依序往東、南、西、北四個方向移動若干距離後，發現大家看熱氣球的仰角都是45°，已知甲、乙兩人相距300公尺，丙、丁兩人相距400公尺，則此時熱氣球的高度為________公尺。

答： 250

解： 設甲、乙、丙、丁所在位置分別為 A、B、C、D

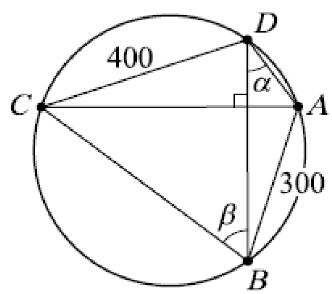
且熱氣球對地面的投影點為 O

$\because$ 大家看熱氣球的仰角皆相等

$\therefore \overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}=\overline{DO}$

即 A、B、C、D 四點共圓

$\overline{AO}$ 即為 $ABCD$ 外接圓半徑



根據正弦定理，令 $\angle ADB=\alpha$，$\angle DBC=\beta$

$\dfrac{300}{\sin\alpha}=\dfrac{400}{\sin\beta}=2R$

$\because \angle ACB=\alpha$（圓周角）　$\therefore \alpha+\beta=90°$

故 $\dfrac{300}{\sin\alpha}=\dfrac{400}{\cos\alpha}\Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{3}{4}\Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$R=250$

又 $\because$ 仰角為45°　$\therefore$ 熱氣球高度$=R=250$(公尺)

第貳部分：非選擇題（占 **24** 分）

1. 已知$\frac{\pi}{6}\le x\le \pi$，若$f\left(x\right)=\sin 2x-3\left(\sin x+\cos x\right)$。
(1)令$\sin x+\cos x=t$，試求t的範圍。
(2)當$x=m$時，$f\left(x\right)$有最小值n，試求數對$\left(m,n\right)$。

答：(1)$-1\le t\le \sqrt{2}$　(2)$\left(\frac{\pi}{4},1-3\sqrt{2}\right)$

解：$t=\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right]=\sqrt{2}\sin\left(x+45^\circ\right)$

$30^\circ\le x\le 180^\circ \Rightarrow 75^\circ\le x+45^\circ\le 225^\circ$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin 225^\circ\le t\le \sqrt{2}\sin 90^\circ \Rightarrow -1\le t\le \sqrt{2}$

又$t^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2=1+2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x=t^2-1$

$f\left(x\right)=t^2-1-3t=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$

當$t=\sqrt{2}$時，有$Min=1-3\sqrt{2}$

此時$x+45^\circ=90^\circ \Rightarrow x=45^\circ$

2. 在坐標平面上，O為原點，考慮二階方陣$T=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$所定義的線性變換，已知$T$的行列式值不為0。
(1)設$a=b=1$，P_0坐標為$\left(1,0\right)$，若矩陣T將點P_{k-1}映射到點P_k，對所有正整數k恆成立，試求$\overline{OP_0}+\overline{OP_1}+\overline{OP_2}+\cdots\cdots+\overline{OP_9}$的值。
(2)若$T^3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，請寫出滿足條件的所有可能的數對$\left(a,b\right)$。
(3)坐標平面上不共線三點O、P、Q，其中O為原點，若矩陣T在平面上定義的線性變換將P、Q分別映射到點P'、Q'，試證明ΔOPQ與$\Delta OP'Q'$相似。

答：(1)$31+31\sqrt{2}$　(2)$\left(1,0\right)$，$\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$　(3)略

解：(1)$T=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}$

所求$=1+\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\sqrt{2}\right)^9$

$=\frac{1\left[1-\left(\sqrt{2}\right)^{10}\right]}{1-\sqrt{2}}=\left[32-1\right]\left[\sqrt{2}+1\right]=31\sqrt{2}+31$

(2)$T=r\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，$r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$T^3=r^3\begin{bmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}=I \Rightarrow r=1$，$\theta=0^\circ$，$120^\circ$，$240^\circ$及其同界角

故可能的數對$(a,b)=(1,0)$，$\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

(3)$\overrightarrow{OP}=r_1\left(\cos\theta_1,\sin\theta_1\right)$，$\overrightarrow{OQ}=r_2\left(\cos\theta_2,\sin\theta_2\right)$

$\overrightarrow{OP'}=r_1 r\left(\cos\left(\theta_1+\theta\right),\sin\left(\theta_1+\theta\right)\right)$，$\overrightarrow{OQ'}=r_2 r\left(\cos\left(\theta_2+\theta\right),\sin\left(\theta_2+\theta\right)\right)$

則$\angle POQ=\left|\theta_1-\theta_2\right|=\left|\left(\theta_1+\theta\right)-\left(\theta_2+\theta\right)\right|=\angle P'OQ'$

又$\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{r_1 r}{r_2 r}=\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OQ'}}$

故$\Delta OPQ\sim\Delta OP'Q'$