

109 學年度全國高級中學指定科目第五次模擬考數學甲(109-E5)



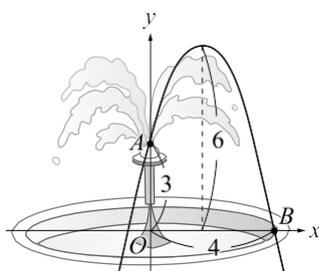
第壹部分：選擇題（占 77 分）

一、單選題（占 24 分）

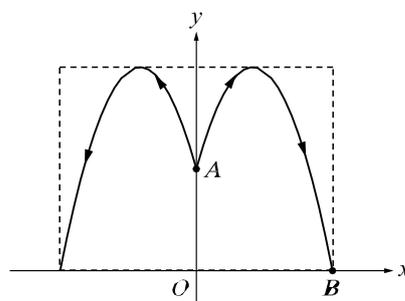
- 小明投擲一顆公正的骰子兩次，若第一次的點數為 a ，第二次的點數為 b ，則一元二次方程式 $ax^2 + bx + 2 = 0$ 有實數解的機率為下列哪一個選項？
 (1) $\frac{5}{12}$ (2) $\frac{5}{18}$ (3) $\frac{5}{24}$ (4) $\frac{1}{6}$ (5) $\frac{5}{36}$
- 若 $f(x)$ 為一個 n 次實係數多項式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ ，則下列敘述何者正確？
 (1) 若 $n=3$ ，則 $f(x^3) - f(x) = 0$ 沒有實根
 (2) 若 $n=4$ ，且 $f(i+1) = f(i-1) = 0$ ，則 $f(x) = 0$ 有實根
 (3) 若 $n=5$ ，且 $3x-5$ 是 $f(x)$ 的因式，則3是 a_n 的因數，5是 a_0 的因數
 (4) 若 $n=6$ ，則 $f(2-3i) \times f(2+3i) \in R$
 (5) 若 $f(3) \times f(4) < 0$ ，則 $f(x) = 0$ 必有實根落在區間 $(3, 4)$ 中，反之，若 $f(3) \times f(4) > 0$ ，則 $f(x) = 0$ 必沒有實根落在區間 $(3, 4)$ 中
- $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = \overline{AC} = 5$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 且 \overline{AD} 與 \overline{BC} 交於 D 點， $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ 且 \overline{BE} 與 \overline{AC} 交於 E 點， \overline{AD} 與 \overline{BE} 交於 H 點，試求四邊形 $CDHE$ 的外接圓直徑長為何？
 (1) 1 (2) $\frac{3}{4}$ (3) 2 (4) $\frac{5}{4}$ (5) $\frac{7}{4}$
- 在複數平面上，設 a, b 為實數且 $z_1 = 2 + ai$ ， $z_2 = 2b + (2-b)i$ ，若 $|z_1| = \sqrt{2}|z_2|$ ，且 $\frac{z_1}{z_2}$ 的主幅角為 $\frac{3\pi}{4}$ ，則 $|a+b|$ 為下列哪一個選項？
 (註： $z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，當 $0 \leq \theta < 2\pi$ 時，則稱 θ 為 z 的主幅角)
 (1) 2 (2) 8 (3) 18 (4) 32 (5) 50

二、多選題（占 32 分）

- 設計師使用實係數二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 來模擬老闆家圓形噴水池的其中一道噴泉，已知噴泉的出水口 A 點高度為3公寸，噴水池直徑為8公寸，水線剛好落在噴水池邊的 B 點上，且老闆要求水線最高處需離地6公寸，如圖(一)所示， O 為原點(亦為噴水池的圓心)，則下列選項哪些是正確的？



圖(一)



圖(二)

- (1) $a < 0$ (2) c 約為 4
- (3) 為避免池水濺出池，需將水線最大範圍圈往內調整，則 $|a|$ 要變大
- (4) 為使整個噴泉呈現圖形的長與寬的比值能符合黃金比例(如圖(二)虛線部分範圍)，

設計師應建議老闆將水線最高點調整為 5(取至整數位, 已知黃金比例 = $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6$)

(5) 若圖(二)之圖形對稱於 y 軸, 且 y 軸右側的二次函數為 $f(x)$, 則 y 軸左側圖形的函數為 $f(-x)$

6. 某日, 爸爸、媽媽帶著小飯糰跟小饅頭一家 4 口參加社區舉辦的娛樂活動, 該活動有甲、乙兩種遊戲可供選擇, 為增加趣味性, 遊戲關主會提供一顆公正骰子給參加者投擲一次。若擲出 1、2 點者玩甲遊戲, 其他點數玩乙遊戲, 若一家 4 口各玩一次, 且每次玩遊戲互不影響, 則下列選項哪些是正確的?

(1) 爸爸玩甲遊戲的機率為 $\frac{1}{3}$ (2) 爸爸跟小饅頭玩同一種遊戲的機率為 $\frac{1}{2}$

(3) 4 人中恰有 2 人玩甲遊戲的機率大於 $\frac{1}{3}$

(4) 4 人中參加甲遊戲的人數大於參加乙遊戲的人數的機率為 $\frac{1}{9}$

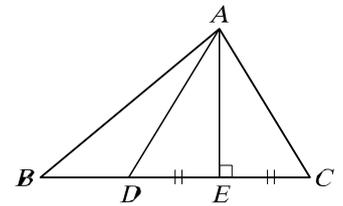
(5) 若隨機變數 X 表示 4 人中玩甲遊戲的人數, 則 X 的期望值為 $\frac{4}{3}$ 人

7. 在平面上的 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$, D 點在 \overline{BC} 上, 且 E 點為 \overline{DC} 之中點, 如右圖所示, 則下列選項哪些是正確的?

(1) $\overline{AB} - \overline{AE} = \overline{EB}$ (2) $\overline{AD} + \overline{AC} = 2\overline{AE}$

(3) $\overline{AD} \cdot \overline{DE} > 0$ (4) $\overline{AB} \cdot \overline{AE} > \overline{AC} \cdot \overline{AE}$

(5) \overline{CA} 在 \overline{DB} 方向的正射影為 \overline{CE}



8. 在舞臺上, $B(4, 3, 1)$ 是最顯眼的位置, 舞臺上想被看清楚就必須在矩形 $ACFD$ 的範圍內, 其中 $A(2, 3, 1)$ 、 $C(6, 3, 1)$ 、 $F(6, 2, 1)$ 、 $D(2, 2, 1)$ 。而燈光中位於 $P(4, 10, 8)$ 的 follow 燈是主持人最常用的, 自由移動的 follow 燈, 具有導引視覺動線效果。請依題意敘述, 選出下列敘述中所有正確的選項。

(1) 直線 PB 的對稱比例式為 $\frac{y-10}{7} = \frac{z-8}{7}$

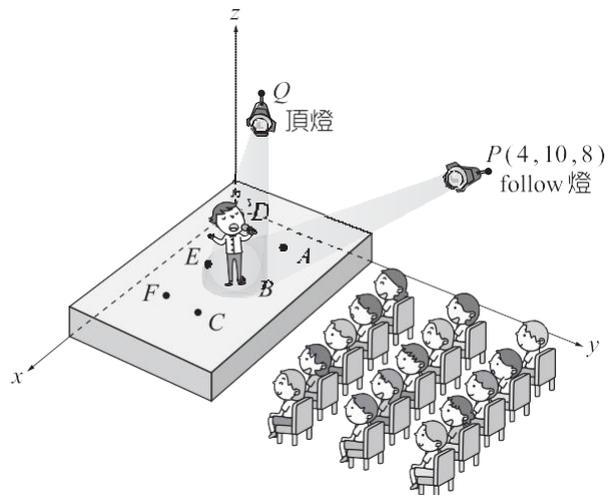
(2) 直線 PB 的參數式為 $\begin{cases} x=4 \\ y=10+t, t \in R \\ z=8+t \end{cases}$

(3) 在 $B(4, 3, 1)$ 點正上方 7 單位, 再往 y 軸正向移動 1 單位處設置頂燈, 則頂燈 Q 坐標為 $(5, 3, 8)$

(4) 若光線自 follow 燈 $P(4, 10, 8)$ 射出, 沿著向量 $(2k, k-8, -7)$ 方向前進, 則 follow 燈光

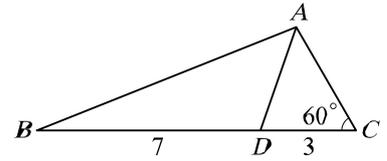
投射的直線參數式為 $\begin{cases} x=4+2ks \\ y=10+(k-8)s, s \in R \\ z=8-7s \end{cases}$

(5) 承(4), 若 follow 燈光投射必須能照遍整個矩形 $ACFD$ 區域(含邊界), 則實數 k 的範圍至少為 $-1 \leq k \leq 1$



三、選填題（占 21 分）

- A. 平面上的 $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{BC} 邊上一點且 \overline{AD} 平分 $\angle BAC$ 。
 已知 $\overline{BD} = 7$ ， $\overline{DC} = 3$ ，且 $\angle ACB = 60^\circ$ ，如右圖所示。試求 $\sin \angle BAC =$ _____。(化為最簡根式)



- B. 設 a, b 為實數，二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a+1 & -1 \\ -1 & -2+b \end{bmatrix}$ ，若 $A^{-1} = A$ ，試求 $a^2 + b^2 =$ _____。

- C. 已知兩實數 a, b 滿足 $a > b > 2$ 且 $\log_a b + \log_b a = \frac{5}{2}$ ，若 $y = 2^x$ 通過點 (b, a) ，
 則數對 $(a, b) =$ _____。

第貳部分：非選擇題（占 23 分）

- 一、將函數圖形 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位，再將圖形沿著 x 軸伸縮 3 倍，試求：

- (1) 新圖形的函數為何？(4 分)
- (2) 若 $-2 \leq x \leq 2$ ，則 $x + \frac{1}{2} = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的實數解有多少個？(5 分)

- 二、針對平面上的二階方陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{bmatrix}$ 進行線性變換，對於平面上異於原點 O 的點 P_1 ，

設 P_1 經 A 變換成 P_2 ， P_2 經 A 變換成 P_3 。若 $a = \overline{OP_1}$ 。試求：

- (1) $\sin \angle P_1OP_3$ 。(4 分)
- (2) 由 $\triangle P_1P_2P_3$ 所構成的三角形面積 (以 a 形式表示)。(5 分)
- (3) 若 P_1 是圖形 $y = \frac{1}{26}x^2 - 26$ 上的動點，試求 $\triangle P_1P_2P_3$ 所構成三角形面積的最小可能值。
(5 分)

**RA5111 109 學年度全國高級中學指定科目第五次模擬考數學甲
(109-E5) 參考答案**

選擇題：1. (2) 2. (4) 3. (5) 4. (3) 5. (1)(3)(4)(5) 6. (1)(4)(5) 7. (1)(2)(5) 8. (2)(4)(5)

選填題：A. $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ B. 5 C. (16,4)

非選擇題：一、(1) $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{12}\right)$ (2) 1 個

二、(1) $\frac{120}{169}$ (2) $\frac{5}{169}a^2$ (3) 15