數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
答案	⑵	⑷	⑸	⑶	⑴⑶⑷⑸	⑴⑷⑸	⑴⑵⑸	⑵⑷⑸	

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. ⑵

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：了解古典機率的意義與應用

解析：若此方程式有實數解，則判別式 $b^2-8a\geq 0$

當 $b=3$ 時，$a=1$

當 $b=4$ 時，$a=1$，2

當 $b=5$ 時，$a=1$，2，3

當 $b=6$ 時，$a=1$，2，3，4

$\therefore$所求機率 $p=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$，故選⑵。

2. ⑷

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：實係數方程式虛根成對定理及勘根定理

解析：⑴╳：$\because f(x^3)-f(x)=0$ 為 9 次方程式

而依實係數多項式方程式虛根成對定理

$\therefore$該方程式必有實根

⑵╳：$\because n=4\quad \therefore f(x)=0$ 有 4 個根

① $f(i+1)=0$，則 $f(-i+1)=0$

② $f(i-1)=0$，則 $f(-i-1)=0$

$\therefore$該方程式皆為複數根，沒有實根

⑶╳：須加上「整係數」的條件，敘述才會成立

⑷○：$\because f(x)$ 為實係數多項式

$\therefore$若 $f(2-3i)=a+bi\ (a，b\in R)$，則 $f(2+3i)=a-bi$

$\therefore f(2+3i)\times f(2-3i)=(a-bi)(a+bi)=a^2+b^2\in R$

⑸╳：$f(3)\times f(4)>0$，代表在 $(3,4)$ 之間有偶數個根

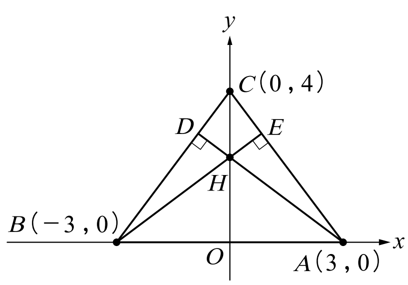
故選⑷。

3. ⑸

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：對角互補的四邊形是圓內接四邊形；直徑所對的圓周角為 90°

解析：將圖形代入直角坐標系 $O(0,0)$，$A(3,0)$，$B(-3,0)$，$C(0,4)$，如右圖所示



① $m_{\overline{AC}}=-\dfrac{4}{3}\quad \because \overline{AC}\perp\overline{BE}\Rightarrow m_{\overline{BE}}=\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow$直線 BE 的方程式為 $3x-4y=-9$

② $m_{\overline{BC}}=\dfrac{4}{3}\quad \because \overline{BC}\perp\overline{AD}\Rightarrow m_{\overline{AD}}=-\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow$直線 AD 的方程式為 $3x+4y=9$

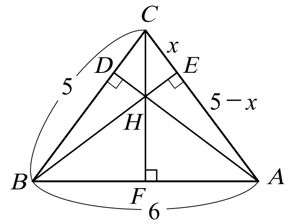
由 $\begin{cases}3x-4y=-9\\3x+4y=9\end{cases}$ 可得 $H\left(0\ ,\ \dfrac{9}{4}\right)$

四邊形 $CDHE$ 中，$\overline{CE}\perp\overline{HE}$，$\overline{CD}\perp\overline{HD}$，$\angle CDH+\angle CEH=180^\circ$ 對角互補

$\therefore CDHE$ 四點共圓，直徑即為 $\overline{CH}=\left|4-\dfrac{9}{4}\right|=\dfrac{7}{4}$

故選⑸。

〈另解①〉



令 $\overline{CE}=x$，$\overline{AE}=5-x$

由 $\overline{BE}\perp\overline{AC}$

在△BCE 中，$\overline{BE}^2=5^2-x^2$

在△BAE 中，$\overline{BE}^2=6^2-(5-x)^2$

$\Rightarrow 5^2-x^2=6^2-(5-x)^2\Rightarrow x=\dfrac{7}{5}$

又△CEH～△CFA(AA 相似)，且 $\overline{CF}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\therefore \dfrac{\overline{CH}}{\overline{CE}}=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CF}}\Rightarrow\dfrac{\overline{CH}}{\frac{7}{5}}=\dfrac{5}{4}\Rightarrow\overline{CH}=\dfrac{7}{4}$。

〈另解②〉

△ABC 面積$=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{CF}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{AD}$

又 $\overline{CF}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\therefore \overline{AD}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{CF}}{\overline{BC}}=\dfrac{6\times4}{5}=\dfrac{24}{5}$，$\overline{CD}=\sqrt{5^2-\left(\dfrac{24}{5}\right)^2}=\dfrac{7}{5}$

又 $\cos\angle BCF=\dfrac{4}{5}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{CH}}$

$\therefore \overline{CH}=\dfrac{\frac{7}{5}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{7}{4}$。

4. (3)

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：了解複數及極式應用計算

解析：$\because \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-1+i\Rightarrow z_1=(-1+i)z_2$

$\therefore 2+ai=(-1+i)[2b+(2-b)i]=-2b+(b-2)i+2bi-(2-b)$

$=-2b+bi-2i+2bi-2+b=-2-b+(3b-2)i$

$\Rightarrow\begin{cases}2=-2-b\\a=3b-2\end{cases}$，解得 $b=-4$，$a=-14$

$\therefore |a+b|=18$

故選(3)。

二、多選題

5. (1)(3)(4)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：二次函數決定開口的因素及黃金比例的應用

解析：(1) ○：開口向下，$a<0$

(2) ╳：令 $f(x)=ax^2+bx+c$

由題圖㈠可知，$c=f(0)=3$

(3) ○：開口變小，則 $|a|$ 要變大

(4) ○：令虛線長方形的寬為 k，則 $\dfrac{8}{k}\approx1.6\Rightarrow k\approx5$

(5) ○：∵左右兩圖形對稱於 y 軸

$\therefore y=f(-x)$

故選(1)(3)(4)(5)。

6. (1)(4)(5)

出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：理解獨立事件的意義，能寫出機率分布與期望值的運算

解析：由題意可知，每人玩甲遊戲的機率為 $\frac{C_1^2}{C_1^6}=\frac{1}{3}$，玩乙遊戲的機率為 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(1) ○

(2) ╳：每個人玩遊戲互不影響

$\therefore$同玩甲遊戲的機率為 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，同玩乙遊戲的機率為 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

同玩一種遊戲的機率為 $\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

(3) ╳：$C_2^4\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}<\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

(4) ○：$C_4^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0+C_3^4\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{1}{9}$

(5) ○：每一個人玩甲遊戲的機率為 $\frac{C_1^2}{C_1^6}=\frac{1}{3}$

$\therefore$玩甲遊戲人數的期望值為 $4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ (人)

〈另解〉

隨機變數 X 分布為二項分布 $B\left(4,\frac{1}{3}\right)$

$\therefore E(X)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ (人)

故選(1)(4)(5)。

7. (1)(2)(5)

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：平面向量的加減與內積

解析：(1) ○：$\because \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$

(2) ○：由向量加法的平行四邊形法則可知 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$

(3) ╳：$\because \overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{DE}$ 夾鈍角 θ

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DE}=\overline{AD}\times\overline{DE}\times\cos\theta<0$

(4) ╳：$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AE}|^2$，且 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AE}|^2$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$

(5) ○：$\because$向量可以平移

$\therefore \overrightarrow{CA}$ 在 $\overrightarrow{DB}$ 方向的正射影可看為 $\overrightarrow{CA}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 方向的正射影，即為 $\overrightarrow{CE}$

故選(1)(2)(5)。

8. (2)(4)(5)

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：空間坐標系、空間向量、空間中的直線

解析：(1) ╳：$(4,10,8)-(4,3,1)=(0,7,7)$

即為直線 PB 的方向向量

$\therefore$方程式為 $\frac{y-10}{7}=\frac{z-8}{7}$，$x=4$

(2) ○：承(1)，$(0,7,7)\,//\,(0,1,1)$

$\therefore$參數式為 $\begin{cases}x=4\\y=10+t\\z=8+t\end{cases}$，其中 $t\in R$

(3) ╳：Q 點坐標為 $(4,3+1,1+7)=(4,4,8)$

(4) ○：方程式(參數式)即為 $\begin{cases} x=4+2ks \\ y=10+(k-8)s \\ z=8-7s \end{cases}$，其中 $s \in R$

(5) ○：承(4)，$z=8-7s=1 \Rightarrow s=1$

$\therefore \begin{cases} x=4+2k \\ y=10+(k-8) \\ z=1 \end{cases}$

① $2 \le x \le 6 \Rightarrow 2 \le 4+2k \le 6 \Rightarrow -1 \le k \le 1$

② $2 \le y \le 3 \Rightarrow 2 \le k+2 \le 3 \Rightarrow 0 \le k \le 1$

由①、②得 $-1 \le k \le 1$

故選(2)(4)(5)。

三、選填題

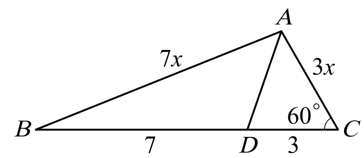
A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：正弦定理與餘弦定理

解析：$\because \overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$ $\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD} = 7:3$

假設 $\overline{AB}=7x$，$\overline{AC}=3x$，其中 $x>0$



由餘弦定理知

$49x^2=9x^2+100-2\times 3x\times 10\times \cos 60^\circ$

$\Rightarrow 40x^2=-30x+100 \Rightarrow 4x^2+3x-10=0 \Rightarrow (4x-5)(x+2)=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{5}{4}$ 或 -2 (不合) $\Rightarrow \overline{AB}=\dfrac{35}{4}$，$\overline{AC}=\dfrac{15}{4}$

由正弦定理知

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{10}{\sin\angle BAC} \Rightarrow \dfrac{35}{4}\sin\angle BAC=10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\angle BAC=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$。

B. 5

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣的應用

解析：$A^{-1}=A \Rightarrow A\cdot A=A^{-1}\cdot A=I_2$

$\Rightarrow A^{-1}A=\begin{bmatrix} a+1 & -1 \\ -1 & -2+b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a+1 & -1 \\ -1 & -2+b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (a+1)^2+1 & -a-b+1 \\ -a-b+1 & (-2+b)^2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

解得 $a=-1$，$b=2$

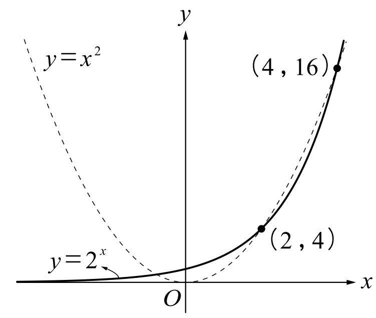
$\therefore a^2+b^2=5$。

C. (16 , 4)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數性質與解方程式

解析：$\because \log_a b\cdot\log_b a=1$，又 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{5}{2}$



設 $\log_b a=k>1$

則 $\dfrac{1}{k}+k=\dfrac{5}{2} \Rightarrow 2k^2-5k+2=0 \Rightarrow (k-2)(2k-1)=0 \Rightarrow k=2$ 或 $\dfrac{1}{2}$ (不合)

$\therefore \log_b a=2 \Rightarrow b^2=a$

又 (b , a) 在 $y=2^x$ 上 $\Rightarrow a=2^b$

$\begin{cases} b^2=a \\ a=2^b \end{cases} \Rightarrow b^2=2^b$

$\therefore b=2$ 或 4，作略圖如右

$\Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=16 \\ b=4 \end{cases}$

故數對 $(a , b)=(16 , 4)$。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $y=\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{12}\right)$；(2) 1 個

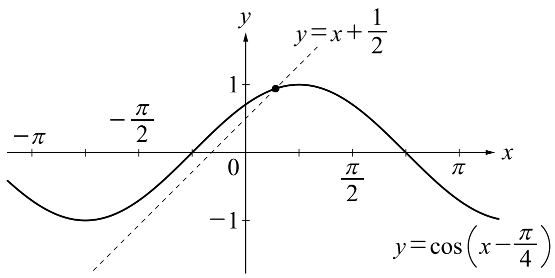
出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：了解三角函數圖形的平移及伸縮，知道利用圖形找交點求方程式實數解

解析：(1) $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{3}\text{單位}}y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$

$\xrightarrow{\text{沿}x\text{軸伸縮3倍}}y=\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{12}\right)$。

(2) $\begin{cases} y=x+\dfrac{1}{2} \\ y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$，作圖如下



由圖形可知 $x+\dfrac{1}{2}=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$的實數解有 1 個。

二、(1) $\dfrac{120}{169}$；(2) $\dfrac{5}{169}a^2$；(3) 15

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣的線性變換

解析：(1)設 $A=\begin{bmatrix} \dfrac{12}{13} & -\dfrac{5}{13} \\ \dfrac{5}{13} & \dfrac{12}{13} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$為一旋轉矩陣，將點 (x, y) 繞原點逆時針旋轉 θ 角

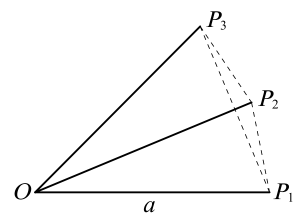
令$\angle P_1OP_3=2\theta \Rightarrow \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{5}{13}\times\dfrac{12}{13}=\dfrac{120}{169}$。

(2) $\overline{OP_1}=\overline{OP_2}=\overline{OP_3}=a$，

則$\triangle P_1P_2P_3$ 面積$=\triangle OP_1P_2$ 面積$+\triangle OP_2P_3$ 面積$-\triangle OP_1P_3$ 面積

$=\dfrac{1}{2}\times a\times a\times\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times a\times a\times\sin\theta-\dfrac{1}{2}\times a\times a\times\sin 2\theta$

$=\dfrac{a^2}{2}\times\dfrac{5}{13}+\dfrac{a^2}{2}\times\dfrac{5}{13}-\dfrac{a^2}{2}\times\dfrac{120}{169}=\dfrac{5}{169}a^2$。



(3)設 $P_1\left(t\ ,\ \dfrac{1}{26}t^2-26\right)$，

則$\overline{OP_1}=\sqrt{t^2+\left(\dfrac{1}{26}t^2-26\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{t^2}{26}-13\right)^2+507}\geq\sqrt{507}=13\sqrt{3}$

$\because \overline{OP_1}$ 在 $t=\pm13\sqrt{2}$ 時，有最小值$13\sqrt{3}$

$\therefore\triangle P_1P_2P_3$ 所構成面積的最小可能值為$\dfrac{5}{169}\times a^2=\dfrac{5}{169}\times(13\sqrt{3})^2=15$。