

臺中市立高級中學 109 學年度指定科目第二次聯合複習考數學甲



RA5113

第壹部分：選擇題（占 77 分）

一、單選題（占 24 分）

1. 平面上有兩點 $A(\log_2 3, \log_3 4)$, $B(\log_2 6, \log_3 24)$, 過原點 O 作一直線 L 平行 \overline{AB} , 若由直線 L 、 x 軸及直線 $x=2$, 三直線所圍成之三角形的面積為 S . 關於面積 S 值的範圍, 試選出正確的選項。(log 2 \approx 0.3010, log 3 \approx 0.4771)
- (1) $1 < S < 1.5$ (2) $1.5 < S < 2$ (3) $2 < S < 2.5$ (4) $2.5 < S < 3$ (5) $3 < S < 3.5$

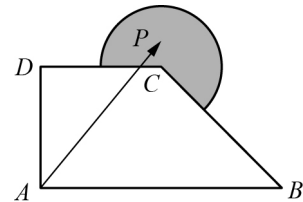
2. 若 $\sin A + \cos A = \tan A$, 其中 $0 < A < \frac{\pi}{2}$. 關於 A 值的可能範圍, 試選出正確的選項。

- (1) $0 < A < \frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{5}$ (3) $\frac{\pi}{5} < A < \frac{\pi}{4}$
 (4) $\frac{\pi}{4} < A < \frac{\pi}{3}$ (5) $\frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}$

3. 設 O 為複數平面的原點, 複數 $z_1 = 2\sin\theta + i\cos\theta$, 其中 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$. 在複數平面上對應向量 $\overrightarrow{OZ_1}$, 以 O 為旋轉中心, 將 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按逆時針方向旋轉 $\frac{\pi}{4}$ 後得到向量 $\overrightarrow{OZ_2}$, 若 $\overrightarrow{OZ_2}$ 對應的複數為 $z_2 = |z_2|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, 則 $\tan\varphi$ 應為下列哪一個選項?

- (1) $\frac{2\tan\theta + 1}{2\tan\theta - 1}$ (2) $\frac{2\tan\theta - 1}{2\tan\theta + 1}$ (3) $\frac{1 - 2\tan\theta}{1 + 2\tan\theta}$ (4) $\frac{1 + 2\tan\theta}{1 - 2\tan\theta}$ (5) $\frac{1}{2\tan\theta + 1}$

4. 如圖(1), 在直角梯形 $ABCD$ 中, $\overline{AB} \perp \overline{AD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{AD} = \overline{DC} = 1$, 圖(1)中圓弧所在圓的圓心為點 C , 半徑為 $\frac{1}{2}$, 且點 P 在圖中陰影部分(包括邊界)運動。



圖(1)

若 $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{BC}$, 其中 α, β 皆為實數, 則 $4\alpha - \beta$ 的最大值為下列哪一個選項?

- (1) $3 - \frac{\sqrt{2}}{4}$ (2) $3 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ (3) 2 (4) $3 + \sqrt{5}$ (5) $3 + \frac{\sqrt{17}}{2}$

二、多選題（占 32 分）

5. 設兩多項式 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + x - 6$, $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, 且 $f(x+2) = g(x)$. 試選出正確的選項。(1) $f(x)$ 除以 $(2x^2 + x)$ 的商式為 $x^2 - x + 2$
 (2) $g(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 -5 (3) $f(x) = 3x$ 恰有一個實根 (4) $e = 72$ (5) $a + c + e = 145$

6. 空間坐標系中, 已知兩點 $A(4, -3, 9)$, $B(2, 1, 5)$ 在平面 $E: x - 2y + 2z + 5 = 0$ 的同側, 且 P 為平面 E 上的動點。試選出正確的選項。
 (1) 過 A, B 中點且平行平面 E 的平面方程式為 $x - 2y + 2z + 19 = 0$
 (2) 內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$ 恆為一定值 (3) \overrightarrow{AB} 與 \overrightarrow{AP} 的夾角恆小於 90°
 (4) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}$ 不可能為零向量 (5) 滿足 $\triangle ABP$ 的面積為 15 的所有點 P 所成的圖形為一圓

7. 有紅藍兩粒質地均勻的正方體形狀骰子，紅色骰子的點數有兩個面是 8，四個面是 2，藍色骰子的點數有三個面是 7，三個面是 1，甲乙兩人各取一顆骰子分別隨機投擲一次，所得點數較大者獲勝。設紅色骰子投擲一次出現點數的期望值 E_1 ，藍色骰子投擲一次出現點數的期望值 E_2 。試選出正確的選項。

(1) 投擲藍色骰子者獲勝的機率小於 $\frac{1}{2}$ (2) 投擲紅色骰子者獲勝的機率大於 $\frac{1}{2}$

(3) $E_1=5$ (4) $E_2=4$ (5) $E_1>E_2$

8. 設 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $A = aB + I$ (a 為實數， $a \neq 0$)。試選出正確的選項。

(1) 矩陣 A 的行列式有最小值 (2) 若 $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 滿足 $P = AP$ ，則 $2x - y = 0$

(3) 若矩陣 A 表對直線 $L: y = mx$ 之鏡射矩陣，則 $a = \frac{2}{5}$

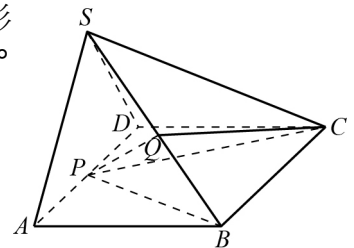
(4) 若矩陣 A 表對直線 $L: y = mx$ 之鏡射矩陣，則 $m = \frac{1}{2}$

(5) 存在正整數 a 使得 $A^2 = I + 2040B$

三、選填題 (占 21 分)

A. 設 a 為實數，若直線 $L: ax + y + 3a - \sqrt{3} = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 = 12$ 交於 A, B 兩點，過 A, B 分別做 L 的垂線與 x 軸交於 C, D 兩點，若 $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ ，則 $\overline{CD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

B. 如圖(2)，已知四角錐 $S-ABCD$ 中， $\triangle SAD$ 是邊長為 a 的正三角形，平面 SAD 垂直平面 $ABCD$ ，四邊形 $ABCD$ 為菱形， $\angle DAB = 60^\circ$ ， P 為 \overline{AD} 的中點， Q 為 \overline{SB} 的中點。若平面 PBC 與平面 PQC 的夾角為 θ ，則 $\sin \theta$ 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



圖(2)

C. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分別為 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊，若向量 $\vec{m} = (a, 2b - c)$ 平行向量 $\vec{n} = (\cos A, \cos C)$ ，則 $\tan 2A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

第貳部分：非選擇題（占 23 分）

一、在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊分別為 a 、 b 、 c ，已知

$$2(\tan A + \tan B) = \frac{\tan A}{\cos B} + \frac{\tan B}{\cos A}。$$

- (1) 證明： $a + b = 2c$ 。(5 分)
- (2) 求 $\cos C$ 的最小值。(5 分)
- (3) 求 $\cos C$ 為最小值時， $\angle C$ 的度數。(2 分)

二、某創投公司擬資助三家新創企業，現聘請兩位專家獨立對每家新創企業所提的方案進行評審。假設評審結果為通過或不通過，且其機率均為 $\frac{1}{2}$ 。創投公司對於企業的資助條件如下：若某家企業獲得兩個通過，則資助 1000 萬元；若只得到一個通過，則資助 500 萬元；若未獲得任何一個通過，則不予資助。令 X 表示該公司資助三家企業金額的總和。試求

- (1) X 之機率分布。(8 分)
- (2) $E(X)$ 。(3 分)

RA5113 臺中市立高級中學 109 學年度指定科目第二次聯合複習考
數學甲 參考答案

選擇題：1. (5) 2. (4) 3. (1) 4. (2) 5. (4)(5) 6. (2)(3)(5) 7. (1)(2)(4) 8. (4)(5)

選填題：A. 4 B. $\frac{\sqrt{77}}{11}$ C. $-\sqrt{3}$

非選擇題：一、(1) 略 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 60°

二、(1)

X	0	500 萬	1000 萬	1500 萬	2000 萬	2500 萬	3000 萬
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

(2) 1500(萬元)