臺中市立高級中等學校 109 學年度指定科目第二次聯合複習考試

數學甲考科解析

考試日期：110 年 3 月 4~5 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4	1	2	45	235	124	45	4	7	7	1	1	－	3

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 直線 L 斜率 $m=\dfrac{\log_3 24-\log_3 4}{\log_2 6-\log_2 3}=\dfrac{\log_3 6}{\log_2 2}=1+\log_3 2$，

L：$y=(1+\log_3 2)x$，

$S=2\times\left[\dfrac{2(1+\log_3 2)}{2}\right]=2(1+\log_3 2)=2+\dfrac{\log 4}{\log 3}$

$=2+\dfrac{0.6020}{0.4771}=3+\dfrac{1249}{4771}<3\dfrac{1}{2}$，

所以 $3<S<3.5$，故選(5)。

2. 因為 $0<A<\dfrac{\pi}{2}$，$\tan A=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以 $1<\tan A\leq\sqrt{2}$。

① 因為 $\tan A>1$，排除(1)(2)(3)選項。

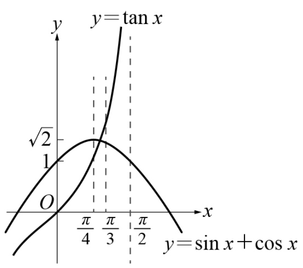
② 因為 $\dfrac{\pi}{4}<A<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 1<\tan A<\sqrt{3}$，(4)有可能成立。

③ 因為 $\dfrac{\pi}{3}<A<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\tan A>\sqrt{3}$，排除(5)選項。

故選(4)。

（事實上，$\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}-\tan\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}-1>0$，

$\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<0$）



3. $z_2=z_1\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=(2\sin\theta+i\cos\theta)\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(2\sin\theta+2i\sin\theta+i\cos\theta-\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[(2\sin\theta-\cos\theta)+i(2\sin\theta+\cos\theta)]$

$=|z_2|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，

所以 $\tan\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{2\sin\theta+\cos\theta}{2\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}$，

故選(1)。

＜另解＞

設 $z_1=|z_1|(\cos\alpha+i\sin\alpha)=2\sin\theta+i\cos\theta$，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

則 $z_2=|z_2|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|z_1|\left[\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$，

所以 $\tan\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

$=\dfrac{2\sin\theta+\cos\theta}{2\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}$。

故選(1)。

4. 以 A 為坐標原點建立直角坐標，

設 $P(x,y)$, $A(0,0)$, $B(2,0)$, $D(0,2)$, $C(1,1)$

$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{BC}=\alpha(2,0)+\beta(-1,1)$

$\Rightarrow(x,y)=(2\alpha-\beta,\beta)\Rightarrow(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{x+y}{2},y\right)$

令 $k=4\alpha-\beta=2x+y$

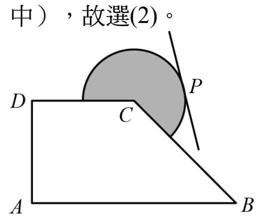
目標函數 k 為直線 L：$y=-2x+k$ 的 y 軸截距，

L：$2x+y-k=0$，

$d(C,L)=\dfrac{|2+1-k|}{\sqrt{5}}\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow 3+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\geq k\geq 3-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

（此最小值的 P 點不在圖中陰影部分無須參酌）

故當直線與圓相切取得最大值 $3+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$（此時點 P 在陰影部分中），故選(2)。



。

二、多選題

5. (1) ×：$f(x)=2x^4+3x^3+5x^2+x-6$

$=(2x^2+x)(x^2+x+2)-x-6$

$\Rightarrow$ 商式為 x^2+x+2。

(2) ×：$g(x)\div(x+1)$ 的餘式為 $g(-1)=f(1)=5$。

(3) ×：因為 $f(x)=2x^4+3x^3+5x^2+x-6=3x$，

所以 $2x^4+3x^3+5x^2+x-6$

$=(x+1)(2x^3+x^2+4x-6)=0$。

$\Rightarrow 2x^3+x^2+4x-6$ 為三次實係數多項式必有一個實根（異於 -1）

$\Rightarrow f(x)=3x$ 至少有兩個實根。

(4) ○：$g(0)=f(2)=72=e$。

(5) ○：因為 $g(1)=f(3)=a+b+c+d+e=285$，

$g(-1)=f(1)=a-b+c-d+e=5$，

所以 $a+c+e=\dfrac{g(1)+g(-1)}{2}=\dfrac{285+5}{2}=145$。

故選(4)(5)。

6. $\overrightarrow{BA}=(2,-4,4)\,//\,\overrightarrow{n}=(1,-2,2)$，所以 $\overrightarrow{AB}\perp$ 平面 E，

設 A, B 兩點在平面 E 共同的垂足點為 K。

(1) ×：過 $\overline{AB}$ 中點 $M(3,-1,7)$ 且平行平面 E 的平面方程式為 $x-2y+2z-19=0$。

(2) ○ (3) ○：因為 $d(A,E)=\dfrac{33}{3}>5=d(B,E)$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB$，

$=\overline{AB}\times d(A,E)>0$

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 恆為一定值，且 $\angle PAB<90°$。

(4) ×：當 $P=K$ 時 $\overrightarrow{AP}\,//\,\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{0}$。

(5) ○：因為 $\overline{AB}=6$，所以△ABP 的高為 5，

所有點 P 所成的圖形為在平面 E 上以 K 為圓心且半徑為 5 的圓。

故選(2)(3)(5)。

7. (1) ○：投擲藍色骰子者獲勝的機率為

$\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ 。

(2) ○：投擲紅色骰子者獲勝的機率為 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$

（或 $\frac{2}{6}\times\frac{6}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3}\times1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$ ）。

(3) × (4) ○ (5) ×：$E_1=8\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}=4$，

$E_2=7\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=4$。

故選(1)(2)(4)。

8. $A=aB+I=\begin{bmatrix}a+1 & -2a\\ -2a & 4a+1\end{bmatrix}$，

$\det(A)=(a+1)(4a+1)-(-2a)(-2a)=5a+1$

(1) ×：矩陣 A 的行列式為 $5a+1$ 沒有最小值。

(2) ×：$P=AP=(aB+I)P=aBP+P\Rightarrow aBP=O$，

因 $a\neq0\Rightarrow BP=O\Rightarrow x+2y=0$。

(3) × (4) ○：若矩陣 A 表對直線 L：$y=mx$ 之鏡射矩陣，

$A=\begin{bmatrix}a+1 & -2a\\ -2a & 4a+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$，

則 $(a+1)+(4a+1)=0$

$\Rightarrow a=-\frac{2}{5}$，$A=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$，

所以 $m=\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{1+\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$ 。

(5) ○：$B^2=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -10\\ -10 & 20\end{bmatrix}=5B$

$A^2=(I+aB)^2=I+2aB+a^2B^2=I+(5a^2+2a)B$

$5a^2+2a-2040=0\Rightarrow(a-20)(5a+102)=0$

存在正整數 $a=20$ 使得 $A^2=I+2040B$，

故選(4)(5)。

三、選填題

A. 圓半徑 $r=2\sqrt{3}$，設圓心 $O(0,0)$ 到弦 $\overline{AB}$ 的距離為 d，

根據直線與圓相交弦長公式有 $\overline{AB}=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3}$，

得 $d=3$，

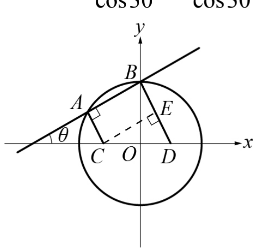
因此圓心 $O(0,0)$ 到直線 L 的距離 $d=\frac{|3a-\sqrt{3}|}{\sqrt{a^2+1}}=3$，

解得 $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，因此 L 的方程式為 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$，

所以直線 L 的斜角 θ 為 $30°$。

如下圖所示，過點 C 作 $\overline{CE}\perp\overline{BD}$ 於點 E，

則 $\overline{CD}=\frac{\overline{CE}}{\cos30°}=\frac{\overline{AB}}{\cos30°}=4$ 。



＜另解＞

如下圖，直線：L：$ax+y+3a-\sqrt{3}=0$，

知直線 L 過定點 $A(-3,\sqrt{3})$，

又 $\overline{AB}=2\sqrt{3}=r=\overline{OA}=\overline{OB}$，所以△$OAB$ 為正三角形。

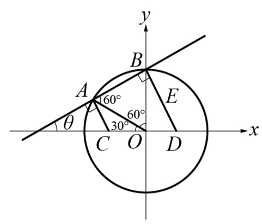
因為 $A(-3,\sqrt{3})$，所以 $\angle AOC=30°$。

因為△OAB 為正三角形，得 $\angle AOB=60°$，又 $\angle AOC=30°$，

所以 B 點在 y 軸上，得 $B(0,2\sqrt{3})$。

直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的斜率 $m=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{0-(-3)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

得直線 L 的斜角 θ 為 $30°$，則 $\overline{CD}=\frac{\overline{AB}}{\cos30°}=4$ 。



B. 因為 $\angle DAB=60°$，△DAB 為正三角形，所以 $\overline{BP}\perp\overline{AD}$ 。

以 P 為坐標原點，$\overleftrightarrow{PA}$ 為 x 軸，$\overleftrightarrow{PB}$ 為 y 軸，

$\overleftrightarrow{PS}$ 為 z 軸建立空間直角坐標系，

則 $S(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}a)$, $B(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$, $C(-a,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$,

$Q(0,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{\sqrt{3}}{4}a)$，

平面 PBC 與平面 PQC 的夾角 θ 可由兩平面的法向量來求出，

平面 PBC 為 xy 平面，法向量為 $\overrightarrow{m}=(0,0,1)$，

設 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$ 為平面 PQC 的一個法向量，

由 $\overrightarrow{n}$ 平行 $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PC}=-\frac{\sqrt{3}}{8}a^2(\sqrt{3},2,-2)$，

取 $\overrightarrow{n}=(\sqrt{3},2,-2)$，

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{m}|}=\frac{-2}{\sqrt{11}\times1}=\frac{-2}{\sqrt{11}}\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{77}}{11}$ 。

C. 因為 $\overrightarrow{m}$ 平行 $\overrightarrow{n}$，所以 $a:(2b-c)=\cos A:\cos C$

$\Rightarrow(2b-c)\cos A=a\cos C$

$\Rightarrow 2b\cos A=c\cos A+a\cos C$

$=c\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\times\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=b$

$\Rightarrow \cos A=\frac{1}{2}$ 。

因為 $0<\angle A<\pi$，所以 $\angle A=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\tan2A=-\sqrt{3}$ 。

第貳部分：非選擇題

一、(1) 見解析；(2) $\frac{1}{2}$；(3) 60°。

【詳解】

(1) $2\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}\right)=\frac{\sin A}{\cos A\cos B}+\frac{\sin B}{\cos A\cos B}$

$\Rightarrow 2(\sin A\cos B+\cos A\sin B)=\sin A+\sin B$

$\Rightarrow 2\sin(A+B)=\sin A+\sin B$，(2 分)

又因為 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，

可得 $2\sin C=\sin A+\sin B$，

再由正弦定理得 $2c=a+b$，故得證。(3 分)

(2)(3) 由(1)可知 $c=\dfrac{a+b}{2}$ ，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}{2ab}$$

$$=\frac{3(a^2+b^2)-2ab}{8ab}\text{ (2 分)}$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-\frac{1}{4}\geq\frac{3}{8}\left(2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\text{，(3 分)}$$

當 $a=b$ 時，等號成立，故 $\cos C$ 的最小值為 $\dfrac{1}{2}$ ，

此時 $\angle C=60°$。(2 分)

二、(1) 見解析；(2) 1500 (萬元)。

【詳解】

(1) 機率分布如下表：

X	0	500 萬	1000 萬	1500 萬	2000 萬	2500 萬	3000 萬
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

(7 分，錯一個 P 扣 1 分，扣完為止)

由題意可知，獲得 2 個通過、1 個通過、0 個通過的機率分別為 $\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}$ (1 分)。

$P(X=0)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{64}$ ；

$P(X=500)=C_1^3\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{6}{64}$ ；

$P(X=1000)=C_2^3\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}+C_1^3\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{64}$ ；

$P(X=1500)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+C_1^3\times\dfrac{1}{2}\times C_1^2\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{20}{64}$ ；

$P(X=2000)=C_2^3\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}+C_2^3\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{64}$ ；

$P(X=2500)=C_2^3\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{64}$ ；

$P(X=3000)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{64}$ 。

(2) $E(X)=0\times\dfrac{1}{64}+500\times\dfrac{6}{64}+1000\times\dfrac{15}{64}+1500\times\dfrac{20}{64}+$

$2000\times\dfrac{15}{64}+2500\times\dfrac{6}{64}+3000\times\dfrac{1}{64}$

$=1500$（萬元）。(3 分)

＜另解＞

設 Y 視為 6 次評審中通過的次數，

則 Y~二項分配 $B(6,\dfrac{1}{2})$ ，令 $X=500$ 萬 $\times Y$

因為 $E(Y)=np=6\times\dfrac{1}{2}=3$，

所以 $E(X)=500$ 萬 $\times E(Y)=500$ 萬 $\times 3=1500$ 萬。(3 分)