

臺北區高中 110 學年度第二學期指定科目第一次模擬考 數學甲



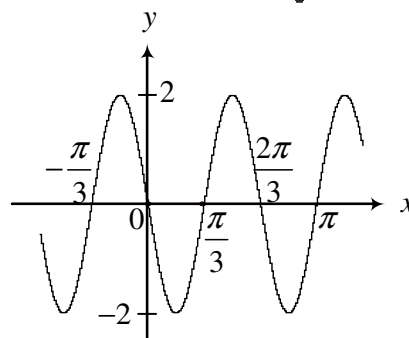
第壹部分：選擇題(共占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 試在下列選項中選出最符合此圖形的函數？

(1) $y = 2\sin 3x$ (2) $y = -2\sin \frac{x}{3}$ (3) $y = -3\sin 2x$

(4) $y = 2\cos(3x + \frac{\pi}{2})$ (5) $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$



2. x, y 為正實數，則下列哪一個不等式恆成立？

(1) $x^{100} > 2^x$ (2) $x^{\log x} \geq 1$ (3) $10^x + \log x \geq 0$

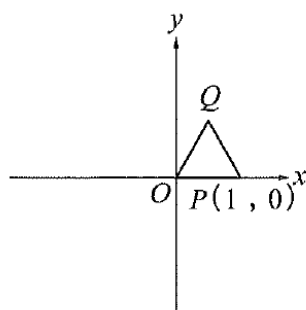
(4) $\log x \cdot \log y \geq \log x + \log y$ (5) $2^x \cdot 2^y \geq 2^x + 2^y$

3. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足下列關係： $a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n$ ， $n \geq 1$ 且 $a_1 < 0 < a_2$ ，則下列選項何者

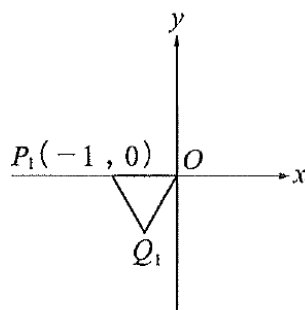
正確？ (1) $\frac{a_2}{2} < a_5$ (2) $\frac{a_3}{2} < a_5$ (3) $a_5 < \frac{a_1 + a_3}{2}$ (4) $a_5 < \frac{a_2 + a_3}{2}$ (5) $a_5 < \frac{a_3 + a_4}{2}$

二、多選題(占 40 分)

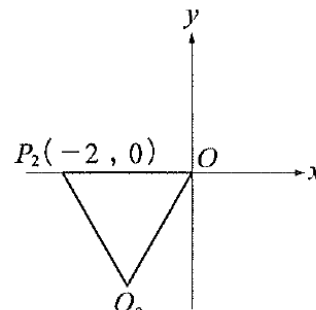
4. 已知邊長 1 的正三角形 OPQ ，與兩個二階方陣 M 與 N 。而二階方陣 M 將(圖一)的 O, P, Q 三點依序變換成(圖二)的 O, P_1, Q_1 ，再經二階方陣 N 變換成(圖三)的 O, P_2, Q_2 ，其中變換後的三角形 OP_1Q_1 和三角形 OP_2Q_2 二者都是正三角形。試問下列選項哪些正確？



(圖一)



(圖二)



(圖三)

(1) 若 Q 點坐標 (x_1, y_1) ，則 $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ (2) $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (4) $\triangle OP_2Q_2$ 再經過 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換後面積保持不變

(5) 選項(4)中的矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 所產生的線性變換是沿 x 軸方向推移 y 坐標的 3 倍

5. 快篩是了解新冠肺炎是否感染的快速方法，若某地區盛行率低於 5% 的情況下，建議不適合全體用快篩檢驗。現在假設 A 區的盛行率為 $\frac{18}{10000}$ ，全體施行新冠肺炎快篩檢驗，篩檢 1 萬人結果如下：

	患有新冠肺炎	未患新冠肺炎	合計
快篩陽性	14	100	114
快篩陰性	4	9882	9886
合計	18	9982	10000

由此結果得知，此區陽性預測值低、偽陽性率高，陰性預測值高、偽陰性率低。
名詞解釋：

盛行率：患有新冠肺炎的人口比例。

陽性預測值：快篩呈陽性反應的受檢者中，患有新冠肺炎的人所占的百分比。

偽陽性率：快篩呈陽性反應的受檢者中，未患新冠肺炎的人所占的百分比。

陰性預測值：快篩呈陰性反應的受檢者中，未患新冠肺炎的人所占的百分比。

偽陰性率：快篩呈陰性反應的受檢者中，患有新冠肺炎的人所占的百分比。

試問下列敘述何者正確？

(1)由題意得知，此區不適合用快篩檢驗 (2)此次篩檢結果的陽性預測值介於 12 %~13 %

(3)此次篩檢結果的偽陽性率介於 87 %~88 %

(4)如果已知檢驗結果為陰性，那麼沒有患病的機率小於 99 %

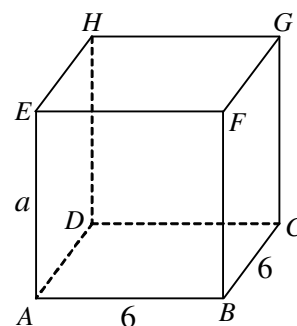
(5)如果已知沒有患病，卻驗出陽性的機率約為 1 %

6. 右圖為一長方體， $\overline{AB} = \overline{BC} = 6$ ， $\overline{AE} = a$ 。若 P 在 \overline{AC} 上， $\overline{AP} : \overline{PC} = 1 : 2$ ，且 $\overline{PH} \perp \overline{PF}$ 。則下列敘述何者正確？

(1) $a = 4$ (2) 此長方體體積為 144

(3) 由 \overline{PH} 、 \overline{PF} 、 \overline{PC} 所決定的平行六面體體積為 192

(4) $\triangle CPH$ 面積 $= 12\sqrt{2}$ (5) 直線 \overleftrightarrow{PC} 垂直平面 HPF



7. 已知函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - a}{x - 3}, & \text{當 } x \neq 3 \text{ 時} \\ m, & \text{當 } x = 3 \text{ 時} \end{cases}$ ， $g(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + b}{x + 7}, & \text{當 } x \neq -7 \text{ 時} \\ n, & \text{當 } x = -7 \text{ 時} \end{cases}$ ，其中 $a, b, m, n \in R$ ，

下列敘述何者正確？

(1)無論 a, m 為何值， $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = m$ (2)無論 b, n 為何值， $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = g(5)$

(3)當 $a = 9$ 、 $b = 49$ 時， $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 10$

(4)當 $a = 9$ 、 $b = 49$ 時， $\lim_{x \rightarrow t} f(x) + \lim_{x \rightarrow t} g(x) = 10$ ，其中 $t \in R$

(5)若 $a = 9$ 、 $b = 49$ ，且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 皆為連續函數，則 $m + n = 20$

8. 設三次函數 $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 7$ ，令 $g(x) = f(x+a) - b$ ，已知 $g(x)$ 對稱於原點，則下列選項哪些是正確的？

(1) $\frac{g(3) + g(-3)}{2} = 0$ (2) $(a, b) = (2, 4)$ (3) x 值愈來愈大，則 $f(x)$ 值愈來愈小

(4) $f(2.01)$ 計算到小數點後第二位(四捨五入)的近似值為 5.03

(5) $f(x)$ 在 $x = 2$ 附近的局部特徵圖形近似於 $y = 3x - 1$

三、選填題(占 18 分)

9. 在物理學的幾何光學中，我們用兩個參數 x 、 θ 來描述一道光束。今有射入的光束

x_1 、 θ_1 ，和經介質轉換射出的光束 x_2 、 θ_2 ，滿足 $\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$ ，其中 $\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 為該介質

的光線轉換矩陣。已知： $x_2 = 1 + \pi$ ， $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ ， $d = 4$ ，則數對 $(x_1, \theta_1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

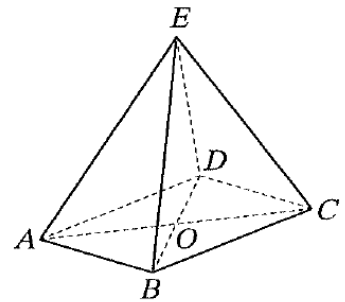
10. 已知坐標平面的原點為 O 點，且圓 $C: x^2 + y^2 = 2$ 和直線 $L: y = mx + k$ 相交於 A 、 B 兩點，其中 m 、 k 為實數。設 L 與 x 軸正向的夾角為 60° ，且 $\angle AOB = 90^\circ$ ，則實數 $k =$ _____。

11. 直角坐標平面上，原點為 O ，已知 $A(1, 2)$ ，令 $\vec{a} = \vec{OA}$ ， $\vec{p} = \vec{OP}$ ，且 $\vec{p} \perp (\vec{a} - \vec{p})$ ，則 $|\vec{p}| \times |\vec{a} - \vec{p}|$ 的最大值為_____。(化為最簡分數)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

空間中有一個四面體，如右圖。已知底面 $ABCD$ 為平行四邊形，對角線的交點為 O 點，且 \vec{OE} 垂直底面 $ABCD$ ，試求下列各小題。



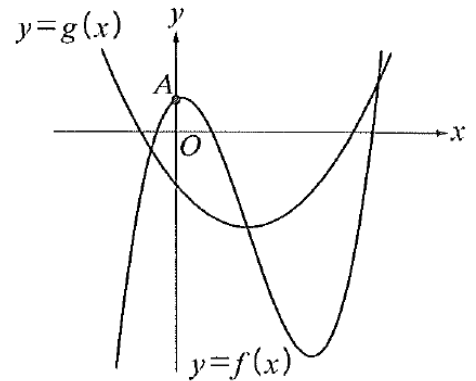
12. 若點 $A(-1, -3, 0)$ ，向量 $\vec{AB} = (2, 0, 1)$ ， $\vec{AD} = (2, 1, 2)$ ，試求 O 點的坐標。(3 分)

13. 承 12.，試求平行四邊形 $ABCD$ 的面積。(4 分)

14. 承 13.，設 \vec{OE} 長度之值為平行四邊形 $ABCD$ 面積之值的 2 倍，且頂點 E 的 z 坐標大於 0，試求 E 的坐標。(5 分)

15-17 題為題組

三次多項式 $f(x)$ 與 $g(x) = x^2 - 4x - 5$ 的圖形如右所示，其中 $f(x)$ 的最高次項係數為 1。假設 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得餘式為 $r(x) = mx + k$ ，已知 $r(-1) + r(5) = 2f(2)$ 且 $y = f(x)$ 圖形與 y 軸交於 A 點。試回答下列問題：



15. 如題圖所示，關於 k 值，下列何者正確？(單選題，3 分)

- (1) $f(0) < g(0) < k$
- (2) $f(0) < k < g(0)$
- (3) $k < g(0) < f(0)$
- (4) $g(0) < k < f(0)$
- (5) $g(0) < f(0) < k$

16. 若 $y = r(x)$ 圖形與 y 軸交於 B 點，試求 \vec{AB} 長度。(4 分)

17. 當 $f(x)$ 在 A 點處的一次近似為 $y = 2x + 3$ ，試求：

- (1) $r(x)$ 。(3 分)
- (2) $f(x)$ 在 $(4, f(4))$ 處的一次近似。(2 分)

RA5114 臺北區高中 110 學年度第二學期指定科目第一次
模擬考數學甲 參考答案

選擇題：1. (4) 2. (2) 3. (4) 4. (3)(4)(5)or(1)(3)(4)(5) 5. (1)(2)(3)(5) 6. (1)(2)(3)
7. (2)(3)(4)(5) 8. (1)(4)(5)

選填題：9. $(1, \frac{\pi}{4})$ 10. ± 2 11. $\frac{5}{2}$

混合題或非選擇題：12. $(1, \frac{-5}{2}, \frac{3}{2})$ 13. 3 14. $(-1, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2})$

15. (3) 16. 10 17. (1) $r(x) = -x - 7$ (2) $y = 2x - 29$