數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(2)	(4)	(3)(4)(5)	(1)(2)(3)(5)	(1)(2)(3)	(2)(3)(4)(5)
8.						
(1)(4)(5)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (4)

　出處：第三冊〈三角函數〉

　目標：三角函數的圖形判斷

　解析：圖形的振幅為 2，週期為 $\frac{2\pi}{3}$，

　且通過點 $(0, 0)$、點 $\left(\frac{\pi}{6}, -2\right)$，

　故此圖形為 $y=-2\sin 3x$ 的函數圖形

　(1)╳：$y=2\sin 3x$ 與 $y=-2\sin 3x$ 對稱於 x 軸

　(2)╳：圖形的週期為 6π

　(3)╳：圖形的振幅為 3，週期為 π

　(4)○：$y=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin 3x$

　(5)╳：圖形的週期為 2π

　故選(4)。

2. (2)

　出處：第三冊〈指數與對數函數〉

　目標：指對數函數的圖形和關係

　解析：(1) $x=1$ 代入得 $1^{100}>2^1$ 不成立

　(2)令 $\log x=a \Rightarrow x=10^a$

　$\Rightarrow x^a=(10^a)^a=10^{a^2}\geq 10^0=1$

　(3)當 $0<x<1$ 且 x 很靠近 0 時，$\log x$ 為負無窮大，

　$10^x+\log x\geq 0$ 不成立

　(4) $x=10$，$y=10$ 代入 $\log x\cdot\log y\geq\log x+\log y$

　得 $1\geq 2$ 不成立

　(5) $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 代入 $2^x\cdot 2^y\geq 2^x+2^y$

　得 $2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2\geq 2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}\approx 1.414+1.414$ 不成立

　故選(2)。

3. (4)

　出處：第一冊〈數與式〉、第二冊〈數列與級數〉

　目標：數列結合分點公式

　解析：由數列關係：$a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$ 可得，a_{n+2} 是端點 a_n 與 a_{n+1} 的三等分點中靠近 a_{n+1} 的分割點。故如下圖

　(1)╳：當 $0\in(a_5, a_2)$ 時，$\frac{a_2}{2}>a_5$

　(2)╳：當 $0\in\left(\frac{a_2+a_4}{2}, a_2\right)$ 時，$\frac{a_3}{2}>a_5$

　(3)╳：如圖，a_1 與 a_3 中點在 a_5 左側，故 $\frac{a_1+a_3}{2}<a_5$

　(4)○：如圖，a_2 與 a_3 中點在 a_5 右側，故 $a_5<\frac{a_2+a_3}{2}$

　(5)╳：如圖，a_5 是端點 a_3 與 a_4 的三等分點中靠近 a_4 的分割點，所以 a_3 與 a_4 中點在 a_5 左側，

　故 $a_5>\frac{a_3+a_4}{2}$

　故選(4)。

二、多選題

4. (3)(4)(5)

　出處：第四冊〈矩陣〉

　目標：認識二階方陣的線性變換，並能運用

　解析：(1)╳：Q 可以看成 P 點逆時針旋轉 60° 的線性變換，

　故 $\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$

　(2)╳：由於 $M=\begin{bmatrix}\cos 180^\circ & -\sin 180^\circ\\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，

　矩陣 M 表示以原點 O 為中心，逆時針旋轉 180° 的線性變換

　(3)○：矩陣 N 表示以原點 O 為中心，伸縮 2 倍

　$\therefore N=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

　(4)○：$\because \left|\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right|=1$　$\therefore$面積不變

　(5)○：由定義可知

　故選(3)(4)(5)。

5. (1)(2)(3)(5)

　出處：第四冊〈機率〉

　目標：由題意計算條件機率與貝氏定理

　解析：(1)○：$\frac{18}{10000}<5\%$，此 A 區不適合用快篩檢驗

　(2)○：陽性預測值為 $\frac{14}{114}\approx 0.1228$

　(3)○：偽陽性率為 $\frac{100}{114}\approx 0.8772$

　(4)╳：$\frac{9882}{9886}\approx 0.9996$

　(5)○：$\frac{100}{9982}\approx 0.0100$

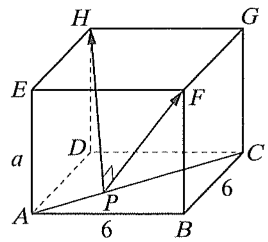
　故選(1)(2)(3)(5)。

6. (1)(2)(3)

　出處：第四冊〈空間向量〉

　目標：基本的空間向量計算

　解析：坐標化，令 $D(0, 0, 0)$，則 $A(6, 0, 0)$、$B(6, 6, 0)$、$C(0, 6, 0)$、$F(6, 6, a)$、$G(0, 6, a)$、$H(0, 0, a)$、$P(4, 2, 0)$。



　$\overrightarrow{PH}=(-4, -2, a)$、$\overrightarrow{PF}=(2, 4, a)$、$\overrightarrow{PC}=(-4, 4, 0)$

　(1)○：$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PF}=-8-8+a^2=0$，

　得 $a=\pm 4$（-4 不合）

(2) ○：此長方體體積為 $6\times6\times4=144$

(3) ○：平行六面體體積為 $\left|\begin{vmatrix}-4 & -2 & 4\\ 2 & 4 & 4\\ -4 & 4 & 0\end{vmatrix}\right|=192$

(4) ╳：$\triangle CPH=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PC}|^2|\overrightarrow{PH}|^2-(\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PH})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{32\times36-8^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{1088}$

$=4\sqrt{17}$

(5) ╳：$\overrightarrow{PH}\times\overrightarrow{PF}=(-24,24,-12)=-12(2,-2,1)$，

$\overrightarrow{PC}=(-4,4,0)=-4(1,-1,0)$，

所以 $\overrightarrow{PH}\times\overrightarrow{PF}$ 不平行 $\overrightarrow{PC}$，

即直線 $\overleftrightarrow{CP}$ 與平面 HPF 不垂直

故選(1)(2)(3)。

7. (2)(3)(4)(5)

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：函數的極限與連續函數定義

解析：(1) ╳：$\lim\limits_{x\to3}f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-a}{x-3}$ 不一定存在

(2) ○：$\lim\limits_{x\to5}g(x)=g(5)$

(3) ○：當 $a=9$、$b=49$ 時，

$\lim\limits_{x\to2}f(x)+\lim\limits_{x\to2}g(x)=5+5=10$

(4) ○：當 $a=9$、$b=49$ 時，

$\lim\limits_{x\to t}f(x)+\lim\limits_{x\to t}g(x)=(t+3)+(-t+7)=10$

(5) ○：若 $a=9$、$b=49$，

則 $f(x)=\begin{cases}x+3\text{，當 }x\neq3\text{ 時}\\ m\text{，當 }x=3\text{ 時}\end{cases}$、

$g(x)=\begin{cases}-x+7\text{，當 }x\neq-7\text{ 時}\\ n\text{，當 }x=-7\text{ 時}\end{cases}$，

且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 皆為連續函數，

則 $\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$、

$\lim\limits_{x\to-7}g(x)=g(-7)$，

得 $m=6$、$n=14$，$m+n=20$

故選(2)(3)(4)(5)。

8. (1)(4)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數的特徵

解析：(1) ○：$g(x)$ 對稱於原點，所以 $\dfrac{g(3)+g(-3)}{2}=0$

(2) ╳：$f(x)=-(x-2)^3+3(x-2)+5$，

$g(x)=-x^3+3x$，

所以 $(a,b)=(2,5)$

(3) ╳：$f(x)$ 為 $g(x)$ 平移，所以非嚴格遞減函數

(4) ○：$f(2.01)$ 計算到小數點後第二位（四捨五入）的近似值為 5.03

(5) ○：$f(x)$ 在 $x=2$ 附近的局部特徵圖形近似於 $y=3(x-2)+5=3x-1$

故選(1)(4)(5)。

三、選填題

9. $\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：熟悉矩陣乘法與二階反方陣的運算

解析：因 $\begin{bmatrix}x_2\\ \theta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \theta_1\end{bmatrix}$，故 $\begin{bmatrix}1+\pi\\ \dfrac{\pi}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \theta_1\end{bmatrix}$

而 $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

故 $\begin{bmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+\pi\\ \dfrac{\pi}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \theta_1\end{bmatrix}$

即 $\begin{bmatrix}x_1\\ \theta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+\pi\\ \dfrac{\pi}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{\pi}{4}\end{bmatrix}$

故數對 $(x_1,\theta_1)=\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$。

10. ±2

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：熟悉直線方程式及其相關應用

解析：L 的斜率 $m=\tan60^\circ=\sqrt{3}$，設 $L：y=\sqrt{3}x+k$

因為△OAB 為等腰直角三角形，且 $\overline{OA}=$半徑$=\sqrt{2}$，

所以△OAB 斜邊上的高$=1$

$\Rightarrow d(O,L)=1\Rightarrow\dfrac{|k|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=1$

$\Rightarrow|k|=2\Rightarrow k=\pm2$。

11. $\dfrac{5}{2}$

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量的幾何關係與基本運算

解析：$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}=(1,2)\Rightarrow|\overrightarrow{a}|=\sqrt{5}$

因 $\overrightarrow{p}\perp(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p})$ $\therefore\overline{OP}\perp\overline{AP}$，令 $\angle AOP=\theta$，

則 $|\overrightarrow{p}|=|\overrightarrow{a}|\cos\theta$，$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p}|=|\overrightarrow{a}|\sin\theta$

$\Rightarrow|\overrightarrow{p}|\times|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p}|$

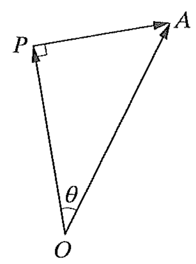
$=(|\overrightarrow{a}|\cos\theta)(|\overrightarrow{a}|\sin\theta)$

$=|\overrightarrow{a}|^2\sin\theta\cos\theta$

$=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{a}|^2\sin2\theta$，

當 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 時，$|\overrightarrow{p}|\times|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p}|$ 有最大值

$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{a}|^2=\dfrac{1}{2}(\sqrt{5})^2=\dfrac{5}{2}$。



第貳部分、混合題或非選擇題

12. $\left(1,\frac{-5}{2},\frac{3}{2}\right)$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：熟悉空間向量的坐標表示法

解析：$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=\frac{1}{2}(4,1,3)$

$=\left(2,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow O\left(1,\frac{-5}{2},\frac{3}{2}\right)$。

◎評分原則

$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$ (1 分)

$=\frac{1}{2}(4,1,3)$

$=\left(2,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ (1 分)

$\Rightarrow O\left(1,\frac{-5}{2},\frac{3}{2}\right)$。 (1 分)

13. 3

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：熟悉向量外積

解析：因為 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(-1,-2,2)$

所以平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=3$。

◎評分原則

因為 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(-1,-2,2)$ (2 分)

所以平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=3$。 (2 分)

14. $\left(-1,-\frac{13}{2},\frac{11}{2}\right)$

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：熟悉向量外積，空間中平面方程式與空間中直線方程式

解析：$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(-1,-2,2)$，假設平面 $ABCD$ 方程式為 $x+2y-2z+k=0$，且通過點 $A(-1,-3,0)\Rightarrow k=7$

可得平面 $ABCD$ 方程式為 $x+2y-2z+7=0$

又外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{OE}$ 平行，可假設

$E\left(1+t,-\frac{5}{2}+2t,\frac{3}{2}-2t\right)$

$\Rightarrow d(E,\text{平面 }ABCD)=2\times3$

$\Rightarrow \frac{\left|(1+t)+2\left(-\frac{5}{2}+2t\right)-2\left(\frac{3}{2}-2t\right)+7\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=6$

$\Rightarrow t=\pm2$

所以，$E\left(-1,-\frac{13}{2},\frac{11}{2}\right)$。

〔另解〕

$\overline{OE}=2\times3=6\Rightarrow|\overrightarrow{OE}|=2|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$

$\Rightarrow\overrightarrow{OE}=\pm2(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})$

$\Rightarrow\overrightarrow{OE}=(-2,-4,4)$ 或 $(2,4,-4)$

$E\left(-1,-\frac{13}{2},\frac{11}{2}\right)$ 或 $E\left(3,\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$(不合)。

◎評分原則

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(-1,-2,2)$，假設平面 $ABCD$ 方程式為 $x+2y-2z+k=0$，且通過點 $A(-1,-3,0)\Rightarrow k=7$

可得平面 $ABCD$ 方程式為 $x+2y-2z+7=0$ (2 分)

又外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{OE}$ 平行，可假設

$E\left(1+t,-\frac{5}{2}+2t,\frac{3}{2}-2t\right)$

$\Rightarrow d(E,\text{平面 }ABCD)=2\times3$

$\Rightarrow \frac{\left|(1+t)+2\left(-\frac{5}{2}+2t\right)-2\left(\frac{3}{2}-2t\right)+7\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=6$

$\Rightarrow t=\pm2$ (2 分)

所以，$E\left(-1,-\frac{13}{2},\frac{11}{2}\right)$。 (1 分)

〔另解〕

$\overline{OE}=2\times3=6\Rightarrow|\overrightarrow{OE}|=2|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$ (2 分)

$\Rightarrow\overrightarrow{OE}=\pm2(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})$

$\Rightarrow\overrightarrow{OE}=(-2,-4,4)$ 或 $(2,4,-4)$ (2 分)

$E\left(-1,-\frac{13}{2},\frac{11}{2}\right)$ 或 $E\left(3,\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$(不合)。 (1 分)

15. (3)

出處：第一冊〈多項式函數〉

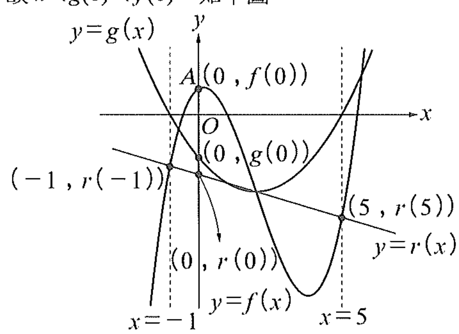
目標：餘式定理，三次函數對稱性

解析：假設 $f(x)$ 除以 $g(x)=x^2-4x-5$ 所得商式為 $Q(x)$，則有 $f(x)=Q(x)(x^2-4x-5)+r(x)=Q(x)(x+1)(x-5)+r(x)$，

故 $r(-1)=f(-1)$，$r(5)=f(5)$

所以 $y=r(x)$ 圖形為通過 $(-1,f(-1))$，$(5,f(5))$ 的斜直線，又 $k=r(0)$。

故 $k<g(0)<f(0)$，如下圖



故選(3)。

16. 10

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：餘式定理，三次函數對稱性

解析：承 15. 題，注意到 $Q(x)$ 為一次多項式且一次項係數為 1

因為 $r(x)=mx+k$ 圖形為直線，

所以 $r(-1)+r(5)=2r(2)$，從而 $f(2)=r(2)$

則 $f(x)-r(x)=Q(x)(x+1)(x-5)$ 有三相異實根 -1，2，5

故 $Q(x)=x-2$

所以 $f(x)-r(x)=(x-2)(x+1)(x-5)$，

則 $\overline{AB}=|f(0)-r(0)|=10$。

◎評分原則

承 15. 題，注意到 $Q(x)$ 為一次多項式且一次項係數為 1 因為 $r(x)=mx+k$ 圖形為直線， 所以 $r(-1)+r(5)=2r(2)$，從而 $f(2)=r(2)$ 則 $f(x)-r(x)=Q(x)(x+1)(x-5)$ 有三相異實根 -1，2，5 故 $Q(x)=x-2$　(2 分) 所以 $f(x)-r(x)=(x-2)(x+1)(x-5)$， 則 $\overline{AB}=\lvert f(0)-r(0)\rvert=10$。　(2 分)

17. (1) $r(x)=-x-7$；(2) $y=2x-29$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數對稱性與一次近似

解析：承 16. 題，$f(x)=(x-2)(x+1)(x-5)+mx+k$

$$=x^3-6x^2+(m+3)x+(10+k)$$

(1)當 $f(x)$ 在 A 點處的一次近似為 $y=2x+3$，

則 $(m+3)x+(10+k)=2x+3$

故 $m=-1$，$k=-7$，

即 $r(x)=-x-7$。

(2) $f(x)=x^3-6x^2+2x+3$

$=(x-4)^3+6(x-4)^2+2(x-4)-21$

故 $f(x)$ 在 $(4,f(4))$ 處的一次近似為 $y=2(x-4)-21$。

〔另解〕

由 $2f(2)=r(-1)+r(5)=f(-1)+f(5)$ 可知 $y=f(x)$ 的對稱中心為 $M(2,f(2))=(2,-9)$

故 $A(0,3)$ 對於 M 的對稱點為 $A'(4,f(4))=(4,-21)$

故 $f(x)$ 在 $(4,f(4))$ 處的一次近似為 $y+21=2(x-4)$，

即 $y=2(x-4)-21$

◎評分原則

承 16. 題，$f(x)=(x-2)(x+1)(x-5)+mx+k$ $=x^3-6x^2+(m+3)x+(10+k)$ (1)當 $f(x)$ 在 A 點處的一次近似為 $y=2x+3$，　(1 分) 則 $(m+3)x+(10+k)=2x+3$ 故 $m=-1$，$k=-7$，　(1 分) 即 $r(x)=-x-7$。　(1 分) (2) $f(x)=x^3-6x^2+2x+3$ $=(x-4)^3+6(x-4)^2+2(x-4)-21$　(1 分) 故 $f(x)$ 在 $(4,f(4))$ 處的一次近似為 $y=2(x-4)-21$　(1 分) 〔另解〕 由 $2f(2)=r(-1)+r(5)=f(-1)+f(5)$ 可知 $y=f(x)$ 的對稱中心為 $M(2,f(2))=(2,-9)$ 故 $A(0,3)$ 對於 M 的對稱點為 $A'(4,f(4))=(4,-21)$　(1 分) 故 $f(x)$ 在 $(4,f(4))$ 處的一次近似為 $y+21=2(x-4)$， 即 $y=2(x-4)-21$。　(1 分)