

# 新北基高級中學 110 學年度分科測驗聯合模擬考數學甲 A 卷

第壹部分：選擇題(共占 76 分)



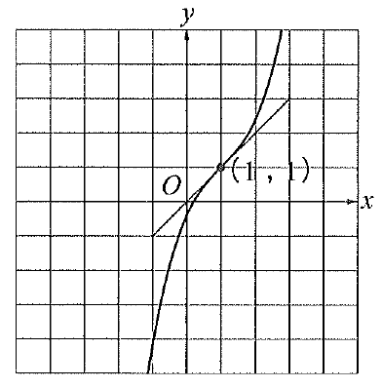
## 一、單選題(占 18 分)

1. 已知點  $P(4,2)$ ，圓  $C: x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$ ，下列何者為過  $P$  點且與圓相切的直線？  
(1)  $x + 3y - 10 = 0$  (2)  $x - 3y + 2 = 0$  (3)  $x + 2y - 8 = 0$  (4)  $x - 2y = 0$  (5)  $x - 4 = 0$
2. 天文學家規定 1 星等的亮度是 6 星等的 100 倍，星等和亮度呈現指數成長模型關係。依此規則，地球上織女星，它是 0.03 星等。從地球上天狼星的亮度約為  $-1.47$  星等。則在地球上天狼星的亮度大約是織女星亮度的幾倍？  
(1) 1.5 (2) 4 (3) 15 (4) 30 (5) 40
3. 若函數  $f(x)$  滿足  $\int_0^1 f(x)dx = 3$ ， $\int_0^2 f(x)dx = 5$ ，試求  
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{n+k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( f\left(\frac{n+1}{n}\right) + f\left(\frac{n+2}{n}\right) + f\left(\frac{n+3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n+n}{n}\right) \right)$$
  
(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

## 二、多選題(占 40 分)

4. 已知  $f(x) = (x^2 + x + 2)(x - 1) + 3$ ， $g(x) = x^3 - 1$ ，下列哪些選項正確？  
(1)  $f(x)$  除以  $g(x)$  的餘式是二次式 (2)  $f(x) \times g(x)$  除以  $x - 1$  的餘式為 3  
(3)  $f(x) \times g(x)$  的展開式中， $x^5$  項的係數為 0  
(4)  $y = f(x)$  的圖形與  $y = g(x)$  的圖形恰只有一個交點  
(5)  $(0,1)$  是  $y = f(x)$  圖形的對稱中心
5. 某家科技公司共有 456 名員工，經過健康檢查後發現這些員工的平均年齡恰為 40 歲，標準差為 3 歲，血壓  $(y)$  對年齡  $(x)$  的最適直線為： $y = 1.2x + 70$  ( $x$  的單位為歲， $y$  的單位為毫米水銀)，下列哪些選項正確？  
(1) 年齡  $(x)$  與血壓  $(y)$  有正相關 (2) 456 名員工的平均血壓為 120 毫米水銀  
(3) 若 456 名員工血壓的標準差為 6 毫米水銀，其  $x$  與  $y$  的相關係數為 0.6  
(4) 若血壓的單位改為厘米水銀，則最適直線的斜率仍是不會改變  
(5) 若血壓的單位改為厘米水銀，則最適直線的方程式仍是不會改變
6. 設有三數列  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$ ，且  $b_n = \log \frac{1}{a_n}$ ， $c_n = 10^{-a_n}$ ， $\langle a_n \rangle$  每項皆為正數，下列哪些選項正確？  
(1)  $\langle b_n \rangle$  每項皆為正數 (2) 若  $2a_n = a_{n-1}$ ， $n \geq 2$ ，則  $\langle b_n \rangle$  是公差為  $\log 2$  的等差數列  
(3) 若  $a_n - 2 = a_{n-1}$ ， $n \geq 2$ ，則  $\langle c_n \rangle$  是公比為 2 的等比數列  
(4) 若  $\langle a_n \rangle$  是遞增數列，則  $\langle b_n \rangle$  是遞增數列 (5) 若  $\langle a_n \rangle$  是遞增數列，則  $\langle c_n \rangle$  是遞減數列
7.  $y = \cos x - \left| \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x \right|$ ，其中  $0 \leq x \leq \pi$ ，選出下列哪些選項正確？  
(1)  $y$  的最大值為  $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$  (2)  $y$  的最大值為  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (3)  $y$  的最小值為  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$   
(4)  $x = 0$  時， $y$  有最大值 (5)  $x = \pi$  時， $y$  有最小值

8. 若物體 A 做直線運動時，其位移  $y(m)$  與記錄觀測時間  $x(sec)$  間的函數局部圖形如右，觀測時間由  $x = -5$  至  $x = 5$ ，圖形僅有反曲點  $(1,1)$  一點無極值點，函數圖形以  $(1,1)$  為切點的切線斜率為 1，則該物體 A
- (1) 做等加速度運動
  - (2) 做等減速度運動
  - (3) 在觀測時間  $x = 1$  時位移  $y = 1(m)$
  - (4) 在觀測時間  $x = 1$  時瞬時速度  $= 1(m/sec)$
  - (5) 在觀測時間  $x = 1$  時瞬時加速度  $= 1(m/sec^2)$



### 三、選填題(占 18 分)

9. 若圓  $O_1$  與圓  $O_2$  的半徑比為 2:1，且圓  $O_1$  與圓  $O_2$  交於  $A$ 、 $B$  兩點，過  $B$  點做一直線分別交圓  $O_1$  與圓  $O_2$  於  $C$ 、 $D$  兩點，在  $\triangle ACD$  中， $\angle CAD = \frac{2}{3}\pi$ ，則  $\tan \angle ACD =$  \_\_\_\_\_。  
(化為最簡根式)
10. 已經知道一條光束從空氣進入水中會產生折射現象，且入射角會大於折射角。在空間坐標中，水面為  $xy$  平面， $xy$  平面上方的空氣中一點  $A(1, 2, 3)$  朝著  $\vec{L} = (-2, -2, -1)$  方向發射一光束，經過水面( $xy$  平面)後，在  $xy$  平面下方發生折射現象，觀察發現折射線通過一點  $B(-7, -6, -10)$ 。若此光束在空氣中和在水中的夾角為  $\theta$ ，則  $\sin \theta =$  \_\_\_\_\_。  
(化為最簡根式)
11. 若函數  $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{x-3}$ ，則導數  $f'(2) =$  \_\_\_\_\_。

### 第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

#### 12-14 題為題組

電腦工程師設計一款發牌遊戲，電腦滑鼠按下去，每一次會發一張牌，且每一張牌只有紅色或藍色的分別。已知工程師設計第一張牌發出紅色牌的機率為  $\frac{1}{5}$ ，且之後都依據以下規則來發牌：若前一張發出紅色牌，則下一張是藍色牌的機率為  $\frac{2}{3}$ ；若前一張發出藍色牌，則下一張是紅色牌的機率為  $p$ 。  
已知  $a_n$  和  $b_n$  分別表示發第  $n$  張牌發出紅色牌和藍色牌的機率。試回答下列問題。

12.  $a_2 + b_2$  的值為下列哪一個選項？(單選題，2 分)

(1)  $\frac{1}{3}$  (2)  $\frac{2}{3}$  (3)  $\frac{2}{5}$  (4)  $\frac{4}{5}$  (5) 1

13. 工程師希望長時間玩下去，發出紅色牌的機率為  $\frac{1}{5}$ ，亦即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{5}$ ，求  $p$  值。(5 分)

14. 承 13.，已知某人玩此遊戲前三張牌均發出同色牌，求此人拿到的前三張牌均為紅色牌的機率為何？(5 分)

15-16 題為題組

若以牛頓法求  $f(x) = x^2 - 3 = 0$  方程式的正根

步驟 1：因為  $f(1)f(2) < 0$ ，故此正根介於 1 與 2 之間，取  $a_1 = 2$

步驟 2：過  $y = f(x)$  上點  $P(2, f(2)) = (2, 1)$  作  $y = f(x)$  的切線

15. 該切線方程式為何？(4 分)

16. 步驟 3：步驟 2 中的切線和  $x$  軸交點的  $x$  坐標  $x_0$ ，令其為  $a_2 = x_0$

重複步驟 2 與 3：過  $y = f(x)$  上點  $Q(a_2, f(a_2))$  作  $y = f(x)$  的切線和  $x$  軸交點的  $x$  坐標，令其為  $a_3$

反覆步驟 2 與 3 可得一數列  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ ，則選出下列正確的選項。(多選題，8 分)

(1)  $a_2 = \frac{3}{2}$     (2)  $a_n$  必遞減    (3) 對於所有正整數  $n$ ， $a_n > \sqrt{3}$  均成立

(4) 存在正整數  $n$  使得  $a_n < \sqrt{3}$     (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3}$

RA5115 新北基高級中學 110 學年度分科測驗聯合模擬考

數學甲 A 卷 參考答案

選擇題：1. (2) 2. (2) 3. (2) 4. (3)(4)(5) 5. (1)(3) 6. (2)(5) 7. (2)(5) 8. (3)(4)

選填題：9.  $\frac{\sqrt{3}}{5}$  10.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  11. -6

混合題或非選擇題：12. (5) 13.  $\frac{1}{6}$  14.  $\frac{1}{26}$

15.  $y = 4x - 7$  16. (2)(3)(5)