

# 新北基高級中學 110 學年度分科測驗聯合模擬考數學甲 B 卷

第壹部分：選擇題(共占 76 分)



## 一、單選題(占 18 分)

1. 已知點  $P(4,2)$ ，圓  $C: x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$ ，下列何者為過  $P$  點且與圓相切的直線？  
(1)  $x + 3y - 10 = 0$  (2)  $x - 3y + 2 = 0$  (3)  $x + 2y - 8 = 0$  (4)  $x - 2y = 0$  (5)  $x - 4 = 0$
2. 天文學家規定 1 星等的亮度是 6 星等的 100 倍，星等和亮度呈現指數成長模型關係。依此規則，地球上織女星，它是 0.03 星等。從地球上天狼星的亮度約為  $-1.47$  星等。則在地球上天狼星的亮度大約是織女星亮度的幾倍？  
(1) 1.5 (2) 4 (3) 15 (4) 30 (5) 40
3. 現有  $A, B$  兩動點在數線上移動，已知當時間  $t$  時， $A, B$  兩點在數線上的位置分別為  $f(t), g(t)$ ，且  $f(t) = t^5 + 2t^2 - 4$ ， $g(t) = t^3 - t^2 - t + 1$ 。若當  $t = c$  時，兩動點在數線上的位置相同，試求  $c$  的範圍為何？  
(1)  $0 < c < 1$  (2)  $1 < c < 2$  (3)  $2 < c < 3$  (4)  $3 < c < 4$  (5)  $4 < c < 5$

## 二、多選題(占 40 分)

4. 已知  $f(x) = (x^2 + x + 2)(x - 1) + 3$ ， $g(x) = x^3 - 1$ ，下列哪些選項正確？  
(1)  $f(x)$  除以  $g(x)$  的餘式是二次式 (2)  $f(x) \times g(x)$  除以  $x - 1$  的餘式為 3  
(3)  $f(x) \times g(x)$  的展開式中， $x^5$  項的係數為 0  
(4)  $y = f(x)$  的圖形與  $y = g(x)$  的圖形恰只有一個交點  
(5)  $(0,1)$  是  $y = f(x)$  圖形的對稱中心
5. 某家科技公司共有 456 名員工，經過健康檢查後發現這些員工的平均年齡恰為 40 歲，標準差為 3 歲，血壓  $(y)$  對年齡  $(x)$  的最適直線為： $y = 1.2x + 70$  ( $x$  的單位為歲， $y$  的單位為毫米水銀)，下列哪些選項正確？  
(1) 年齡  $(x)$  與血壓  $(y)$  有正相關 (2) 456 名員工的平均血壓為 120 毫米水銀  
(3) 若 456 名員工血壓的標準差為 6 毫米水銀，其  $x$  與  $y$  的相關係數為 0.6  
(4) 若血壓的單位改為厘米水銀，則最適直線的斜率仍是不會改變  
(5) 若血壓的單位改為厘米水銀，則最適直線的方程式仍是不會改變
6. 設有三數列  $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle, \langle c_n \rangle$ ，且  $b_n = \log \frac{1}{a_n}$ ， $c_n = 10^{-a_n}$ ， $\langle a_n \rangle$  每項皆為正數，下列哪些選項正確？  
(1)  $\langle b_n \rangle$  每項皆為正數 (2) 若  $2a_n = a_{n-1}$ ， $n \geq 2$ ，則  $\langle b_n \rangle$  是公差為  $\log 2$  的等差數列  
(3) 若  $a_n - 2 = a_{n-1}$ ， $n \geq 2$ ，則  $\langle c_n \rangle$  是公比為 2 的等比數列  
(4) 若  $\langle a_n \rangle$  是遞增數列，則  $\langle b_n \rangle$  是遞增數列 (5) 若  $\langle a_n \rangle$  是遞增數列，則  $\langle c_n \rangle$  是遞減數列
7.  $y = \cos x - \left| \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x \right|$ ，其中  $0 \leq x \leq \pi$ ，選出下列哪些選項正確？  
(1)  $y$  的最大值為  $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$  (2)  $y$  的最大值為  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (3)  $y$  的最小值為  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$   
(4)  $x = 0$  時， $y$  有最大值 (5)  $x = \pi$  時， $y$  有最小值

8. 已知方程式  $x^3 = 4\sqrt{3} + 4i$  的三個根分別為  $a_1, a_2, a_3$ ，而方程式  $y^6 = 4\sqrt{3} + 4i$  的六個根分別為  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ ，則下列哪些選項是正確的？
- (1)  $a_1 = b_1^2$  (2)  $|a_1| = |b_1|^2$
- (3)  $a_1, a_2, a_3$  在複數平面上的對應點，沒有一個落在第四象限
- (4) 將  $a_1, a_2, a_3$  在複數平面上的對應點連成三角形，則其周長為  $6\sqrt{3}$
- (5) 將  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$  在複數平面上的對應點連成六邊形，則其面積為  $6\sqrt{2}$

### 三、選填題(占 18 分)

9. 若圓  $O_1$  與圓  $O_2$  的半徑比為 2:1，且圓  $O_1$  與圓  $O_2$  交於  $A、B$  兩點，過  $B$  點做一直線分別交圓  $O_1$  與圓  $O_2$  於  $C、D$  兩點，在  $\triangle ACD$  中， $\angle CAD = \frac{2}{3}\pi$ ，則  $\tan \angle ACD =$ \_\_\_\_\_。  
(化為最簡根式)
10. 已經知道一條光束從空氣進入水中會產生折射現象，且入射角會大於折射角。在空間坐標中，水面為  $xy$  平面， $xy$  平面上方的空氣中一點  $A(1, 2, 3)$  朝著  $\vec{L} = (-2, -2, -1)$  方向發射一光束，經過水面( $xy$  平面)後，在  $xy$  平面下方發生折射現象，觀察發現折射線通過一點  $B(-7, -6, -10)$ 。若此光束在空氣中和在水中的夾角為  $\theta$ ，則  $\sin \theta =$ \_\_\_\_\_。  
(化為最簡根式)
11. 已知  $P$  點為橢圓  $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{36} = 1$  上一動點， $Q$  點為雙曲線  $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$  上一動點。若  $F_1, F_2$  為橢圓與雙曲線的兩焦點，當  $P$  點與  $Q$  點重合時，此時  $\triangle PF_1F_2$  的面積為\_\_\_\_\_。  
(化為最簡根式)

### 第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

#### 12-14 題為題組

電腦工程師設計一款發牌遊戲，電腦滑鼠按下去，每一次會發一張牌，且每一張牌只有紅色或藍色的分別。已知工程師設計第一張牌發出紅色牌的機率為  $\frac{1}{5}$ ，且之後都依據以下規則來發牌：若前一張發出紅色牌，則下一張是藍色牌的機率為  $\frac{2}{3}$ ；若前一張發出藍色牌，則下一張是紅色牌的機率為  $p$ 。

已知  $a_n$  和  $b_n$  分別表示發第  $n$  張牌發出紅色牌和藍色牌的機率。試回答下列問題。

12.  $a_2 + b_2$  的值為下列哪一個選項？(單選題，2 分)

(1)  $\frac{1}{3}$  (2)  $\frac{2}{3}$  (3)  $\frac{2}{5}$  (4)  $\frac{4}{5}$  (5) 1

13. 工程師希望  $a_3 = \frac{1}{5}$ ，試求  $p$  值。(5 分)

14. 承 13.，已知某人玩此遊戲前三張牌均發出同色牌，求此人拿到的前三張牌均為紅色牌的機率為何？(5 分)

### 15-17 題為題組

近年來手機遊戲多以轉蛋、抽獎、摸彩的方式來提升遊戲等級，玩家藉由儲值的方式，將現實生活中的金錢，換取虛擬世界的貨幣(如鑽石、點卷等)，再由這些虛擬貨幣換取轉蛋的機會來抽取或加強遊戲角色。

而由於機率的不確定性，對於遊戲公司宣稱抽中機率 1% 的角色，即使玩家抽 100 次也沒抽中 1 次，仍不能證明遊戲公司公告的機率不實，甚至有些遊戲公司沒有公布抽中機率。

也因此近日有民眾提案籲訂「轉蛋法」希望遊戲公司公布中獎機率，並經第三方機構驗證。以保障玩家權益。

另外，部分遊戲公司為了避免遊戲玩家屢抽不中，因此建立了保底機制，即當玩家抽卡達一定次數時，最後一次抽卡必定抽中。如保底次數設定為 10 次，則當前 9 次沒抽中時，第 10 次必定抽中。試回答下列問題：

15. 若遊戲公司宣稱抽中遊戲角色「翰林小子」的機率為 0.5%，且每次抽卡結果互不影響。在沒有保底機制的情況下，小明重複進行抽卡直到抽中「翰林小子」時停止，令隨機變數  $X$  表小明的總抽卡次數，則  $X$  的期望值  $E(X)$  最接近下列何者？(單選題，2 分)
- (1) 100 次 (2) 200 次 (3) 300 次 (4) 400 次 (5) 500 次
16. 若遊戲公司宣稱抽中遊戲角色「翰林大師」的機率為定值，且每次抽卡結果互不影響。在沒有保底機制的情況下，小華重複進行抽卡直到抽中「翰林大師」時停止，令隨機變數  $Y$  表小華的總抽卡次數，已知  $Y$  的期望值  $E(Y)$  為 250 次，則  $Y$  的變異數  $\text{Var}(Y)$  為何？(4 分)
17. 若遊戲公司希望保底次數設定方式如下，當玩家連續  $n$  次沒抽中的機率開始低於 50% 時，則設定保底次數為  $n$ 。如某角色抽中機率為 0.25，第 1 次沒抽中的機率為 0.75，連續 2 次沒抽中的機率為  $(0.75)^2 = 0.5625$ ，連續 3 次沒抽中的機率為  $(0.75)^3 = 0.421875 \leq 0.5$ ，故設定保底次數為 3 次。承第 15 題，試求「翰林小子」的保底次數應設定為多少次？(6 分)

RA5116 新北基高級中學 110 學年度分科測驗聯合模擬考

數學甲 B 卷 參考答案

選擇題：1. (2) 2. (2) 3. (2) 4. (3)(4)(5) 5. (1)(3) 6. (2)(5) 7. (2)(5) 8. (2)(3)(4)

選填題：9.  $\frac{\sqrt{3}}{5}$  10.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  11.  $3\sqrt{11}$

混合題或非選擇題：12. (5) 13.  $\frac{1}{6}$  14.  $\frac{1}{26}$

15. 2 16. 62250 17. 137 次