

# 全國公立高級中學 110 學年度分科測驗第五次聯合模擬考卷 I

第壹部分：選擇題(共占 76 分)



## 一、單選題(占 18 分)

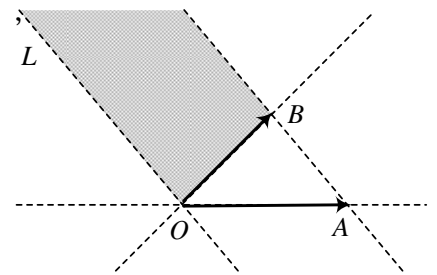
1. 某個國家中，民眾的飲食習慣可區分為米飯與麵食兩大類。經調查後發現，前一天晚餐吃米飯的人，隔天改吃麵食的比例為 60%。前一天晚餐吃麵食的人，隔天改吃米飯的比例為 90%。若 9 月 1 日晚餐吃麵食的民眾比例為 80%，則 9 月 4 日晚餐吃米飯的民眾比例為下列哪一個選項？(1) 80% (2) 65% (3) 50% (4) 35% (5) 20%
2. 已知  $a, b$  皆為正整數且  $a < b$ ，若  $|x-6| > |2x-6|$  且  $|x-a| > |x-b|$  有實數解，則數對  $(a, b)$  有幾組解？(1) 0 (2) 3 (3) 6 (4) 9 (5) 12
3. 已知  $\log_2 x - x + 6 = 0$  的兩根為  $\alpha, \beta$ ， $0.5^x + x - 6 = 0$  的兩根為  $\gamma, \delta$ ，則  $\alpha + \beta + \gamma + \delta$  之值為下列哪一個選項？(1) 0 (2) 3 (3) 6 (4) 9 (5) 12

## 二、多選題(占 40 分)

4. 若實係數多項式函數  $f(x)$  除以  $x^3 - x^2$  的餘式為  $3x + 7$ ，請問下列選項哪些是正確的？
  - (1)  $f(x)$  係數的總和必定為 10
  - (2)  $f(x)$  除以  $x^2$  的餘式必定為  $3x + 7$
  - (3)  $f(x)$  除以  $x^3$  的餘式必定為  $3x + 7$
  - (4)  $f(x)$  除以  $x$  的餘式必定為  $3x + 7$
  - (5)  $x^2 f(x) + x^2$  除以  $3x^3 - 3x^2$  的餘式必定為  $11x^2$

5. 圖(1)為示意圖，直線  $L$  平行直線  $AB$ ，已知  $\vec{OP} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}$ ，請問下列哪些選項中的  $\alpha$  與  $\beta$ ，會使得  $P$  點落在灰色區域？(灰色區域不包含邊界)

- (1)  $\alpha = -0.2$  且  $\beta = 0.8$
- (2)  $\alpha = 0.2$  且  $\beta = 0.8$
- (3)  $\alpha = 1.2$  且  $\beta = -0.8$
- (4)  $\alpha = \log 0.6$  且  $\beta = \log 8$
- (5)  $\alpha = 2^{-10}$  且  $\beta = 3^x$

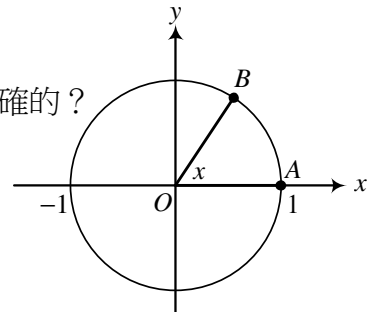


圖(1)

6. 袋中有編號 1, 2, 3, ..., 9 顆球，每顆球被取出的機率皆為  $\frac{1}{9}$ ，請問下列選項哪些是正確的？
  - (1) 從袋中取出 1 顆球，其編號的期望值為 4.5
  - (2) 從袋中 1 次取出 1 顆球，取 3 次，取後放回，其編號總和的期望值為 15
  - (3) 從袋中 1 次取出 1 顆球，取 2 次，取後不放回，其編號總和的期望值為 9
  - (4) 從袋中 1 次取出 1 顆球，取 2 次，取後放回，其編號乘積的期望值為 25
  - (5) 從袋中 1 次取出 1 顆球，取 2 次，取後不放回，其編號乘積的期望值為 25

7. 圖(2)為示意圖，圖中  $O$  點為圓心，圓半徑為 1， $A, B$  為圓上兩點， $\angle AOB = x$  徑，且  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，請問下列選項哪些是正確的？

- (1)  $\frac{x}{2} < \sin \frac{x}{2}$
- (2)  $\sin x < \cos(x+2)$
- (3)  $1 - \cos^2 x < 2 - 2 \cos x$
- (4)  $2 - 2 \cos x < x^2$
- (5)  $x^2 < \frac{\pi^2}{2} - x^2$



圖(2)

8. 在坐標平面上， $P(a, -a^2)$ ， $Q$  兩點皆為函數  $y = f(x) = -x^2$  圖形上的動點，其中以  $P$  點為切點的切線為直線  $L$ ，以  $Q$  點為切點的切線為直線  $M$ ，直線  $L$ ， $M$  兩者互相垂直，且相交於  $R$  點，請問下列選項哪些是正確的？

- (1) 直線  $L$  的方程式為  $y = -2ax + a^2$  (2) 直線  $M$  的斜率為  $\frac{1}{a}$  (3)  $Q$  點坐標為  $(\frac{-1}{a}, \frac{-1^2}{a})$   
 (4) 直線  $M$  的方程式為  $y = \frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$  (5)  $R$  點的  $y$  坐標為  $\frac{1}{4}$

### 三、選填題(占 18 分)

9. 某已知  $a, b, c$  皆為實數， $y = a \sin x + b \cos x + c$  的函數圖形對稱於  $(3, 4)$ ，且振幅為 5，則  $a^2 + b^2 + c^2 =$  \_\_\_\_\_。

10. 數列  $\langle a_n \rangle$  的首項  $a_1 = 5$ ，當  $n$  為大於或等於 2 的正整數時， $a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$ 。  
 若  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_k} \geq \frac{7}{12}$ ，則正整數  $k$  的最小值為\_\_\_\_\_。

11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^{2n+3} + 2^{3n+2} + 2^{n+1} \times 3^n)^{\frac{-2}{n}} =$  \_\_\_\_\_。

### 第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

#### 12 至 14 題為題組

2021 年新冠肺炎入侵臺灣，為了防止疫情擴散，學生在家遠距上課，餐飲業禁止內用，只能外帶，某餐飲店家老闆幽默地在店家門口掛上紅布條，其內容如下：

疫情期間……解開的人才可以內用。

$$\int_{-3}^3 (x^3 \cos \frac{x}{3} + 3) \sqrt{9-x^2} dx$$

放棄吧，外帶幫你打 9 折。

雖然我們並不想內用成為防疫破口，但本著數學人求真求知的精神，讓我們依循下列步驟解出這一題。令  $f(x) = x^3 \cos \frac{x}{3} \sqrt{9-x^2}$ ，請回答下列問題。

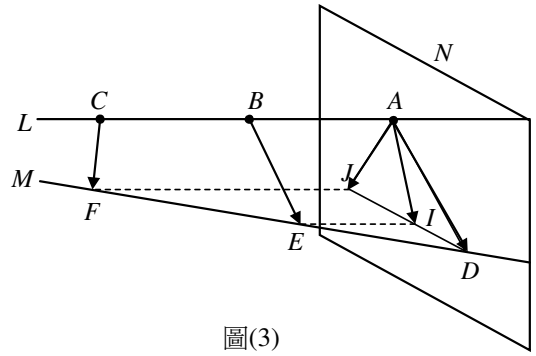
12. 試寫出  $f(-x)$ 。(以  $x, \cos x$  表示) (3 分)

13. 試求  $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$  之值。(3 分)

14. 本著數學人求真求知的精神，請算出  $\int_{-3}^3 (x^3 \cos \frac{x}{3} + 3) \sqrt{9-x^2} dx$  之值。(6 分)

15 至 17 題為題組

圖(3)為示意圖，空間中，直線  $L$  與直線  $M$  為歪斜線，直線  $L$  垂直平面  $N$  於  $A$ 。直線  $L$  另有  $B, C$  兩點使得  $\overline{AB} = \overline{BC}$ 。直線  $M$  上有三點  $D, E, F$ ，其中  $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$  皆垂直  $\overline{AC}$ ，且  $\overline{AD} = 8, \overline{BE} = 5, \overline{CF} = 6$ 。因此  $D$  亦在平面  $N$  上，並令  $B, C, E, F$  在平面  $N$  的投影點依序為  $G, H, I, J$ 。



圖(3)

15. 請問  $|\overrightarrow{AG}| + |\overrightarrow{AH}| + |\overrightarrow{GH}|$  之值為下列哪一個選項？ (單選，3 分)

- (1) 0    (2) 6    (3) 10    (4) 24    (5) 26

16. 請問下列選項哪些是正確的？ (多選題，4 分)

- (1)  $\overline{AI} > 5$     (2)  $\overline{AJ} < 5$     (3)  $\overline{DE}$  與  $\overline{EF}$  的長度必定相等  
 (4)  $\overline{AI}$  必為  $\triangle ADJ$  的內角平分線  
 (5) 直線  $L$  與直線  $M$  的距離必等於  $\triangle ADJ$  在  $\overline{DJ}$  上的高的長度

17. 直線  $L$  與直線  $M$  的距離為多少？ (5 分)

RA5117 全國公私立高級中學 110 學年度分科測驗第五次聯合模擬  
考卷 I 參考答案

選擇題：1. (2) 2. (4) 3. (5) 4. (1)(2)(5) 5. (1)(4) 6. (2)(4) 7. (3)(4)(5) 8. (1)(5)

選填題：9. 41 10. 6 11.  $\frac{1}{81}$

混合題或非選擇題：12.  $f(-x) = -x^3 \cos \frac{x}{3} \sqrt{9-x^2}$  13.  $\frac{9}{2}\pi$  14.  $\frac{27}{2}\pi$

15. (1) 16. (3)(5) 17. 4.8