全國公私立高級中學110學年度分科測驗第五次聯合模擬考試

數學甲考科解析（卷I）

考試日期：111年3月2~3日

1	2	3	4	5	6	7	8	9-1	9-2	10-1	11-1	11-2	11-3
2	4	5	125	14	24	345	15	4	1	6	1	8	1
12	13	14	15	16	17								
			1	35									

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 此題對應的轉移矩陣為$\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\ 0.6 & 0.1\end{bmatrix}$。

因為$\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\ 0.6 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2\\ 0.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8\\ 0.2\end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\ 0.6 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8\\ 0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\ 0.5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\ 0.6 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\ 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.65\\ 0.35\end{bmatrix}$，

所以9月4日晚餐吃米飯的民眾比例為65%，

故選(2)。

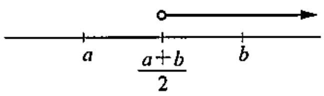
2. ① $|x-6|>|2x-6|\Rightarrow|2x-6|^2-|x-6|^2<0$

$\Rightarrow[(2x-6)-(x-6)]\times[(2x-6)+(x-6)]=x(3x-12)<0$

$\Rightarrow 0<x<4$。

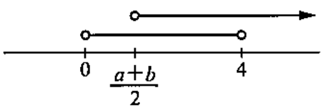
② 由$|x-a|>|x-b|$的幾何意義，

可知x到a的距離大於x到b的距離$\Rightarrow x>\dfrac{a+b}{2}$。



由①②可知$\begin{cases}0<x<4\\ x>\dfrac{a+b}{2}\end{cases}$有實數解，

如圖所示，可得$\dfrac{a+b}{2}<4\Rightarrow a+b<8$。



a	1	2	3
b	2, 3, 4, 5, 6	3, 4, 5	4

有9組解。

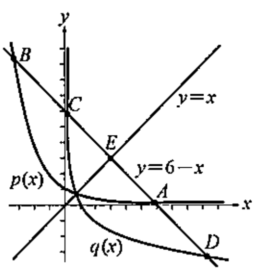
故選(4)。

3. $0.5^x+x-6=0\Rightarrow 6-x=0.5^x$。

$\log_2 x-x+6=0\Rightarrow 6-x=-\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{0.5} x$。

令$p(x)=0.5^x$，$q(x)=\log_{0.5} x$，

其函數圖形如右。



其中$p(x)$與$y=6-x$的交點為A, B，

A, B點的x坐標依序為γ,δ。

$q(x)$與$y=6-x$的交點為C, D，

C, D點的x坐標依序為α,β。

$y=6-x$與$y=x$的交點為$E(3, 3)$。

因為$p(x)=0.5^x$與$q(x)=\log_{0.5} x$

兩者的函數圖形對稱於$y=x$，

且$y=x$與$y=6-x$兩條直線互相垂直，

所以A點與C點對稱於直線$y=x$，中點為$E(3, 3)$。

B點與D點對稱於直線$y=x$，中點為$E(3, 3)$，

因此$\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=3$且$\dfrac{\beta+\delta}{2}=3$，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=12$，

故選(5)。

二、多選題

4. 令$f(x)$除以x^3-x^2的商式為$g(x)$，

由除法原理可知$f(x)=(x^3-x^2)g(x)+3x+7$。

(1) ○：$f(x)$係數的總和為$f(1)=(1^3-1^2)g(1)+3+7=10$。

(2) ○：$f(x)=x^2(x-1)g(x)+3x+7$，若除式為x^2，

則商式為$(x-1)g(x)$，餘式為$3x+7$。

(3) ×：反例：$f(x)=x^3-x^2+3x+7$。

(4) ×：餘式的次數需低於除式。

(5) ○：$x^2f(x)+x^2=x^2[(x^3-x^2)g(x)+3x+7]+x^2$

$=x^2(x^3-x^2)g(x)+3x^3+8x^2$

$=\dfrac{1}{3}x^2(3x^3-3x^2)g(x)+(3x^3-3x^2)+11x^2$

$=(3x^3-3x^2)(\dfrac{1}{3}x^2g(x)+1)+11x^2$，

因此$x^2f(x)+x^2$除以$3x^3-3x^2$的餘式必定為$11x^2$。

故選(1)(2)(5)。

5. 因為灰色區域在直線AB($\alpha+\beta=1$)左方，所以$\alpha+\beta<1$。

因為灰色區域在直線L($\alpha+\beta=0$)右方，所以$\alpha+\beta>0$。

因為灰色區域在直線OB($\alpha=0$)左方，所以$\alpha<0$。

明顯可知選項(1)符合限制，選項(2)(3)不符合限制。

選項(4)：$\alpha=\log 0.6<\log 1=0$，

$\alpha+\beta=\log 0.6+\log 8=\log 4.8$，

因為$0=\log 1<\log 4.8<\log 10=1$，

所以$0<\alpha+\beta<1$。

選項(5)：$\alpha=2^{-10}=\dfrac{1}{1024}>0$，不符合$\alpha<0$。

故選(1)(4)。

6. (1) ×：從袋中取出1顆球，其編號的期望值為

$\dfrac{1+2+3+\cdots+9}{9}=5$。

(2) ○：$\dfrac{1+2+3+\cdots+9}{9}\times 3=5\times 3=15$。

(3) ×：$\dfrac{1+2+3+\cdots+9}{9}\times 2=5\times 2=10$。

(4) ○：$(1\times 1+\cdots+1\times 9)+(2\times 1+\cdots+2\times 9)+\cdots$

$+(9\times 1+\cdots+9\times 9)$

$=(1+2+3+\cdots+9)(1+2+3+\cdots+9)$

$=45^2$，

因此從袋中1次取出1顆球，取2次，取後放回，

其編號乘積的期望值為$\dfrac{45^2}{9\times 9}=5^2=25$。

(5) ×：$(1\times 1+\cdots+1\times 9)+(2\times 1+\cdots+2\times 9)+\cdots$

$+(9\times 1+\cdots+9\times 9)-(1^2+2^2+\cdots+9^2)$

$=(1+2+\cdots+9)^2-(1^2+2^2+\cdots+9^2)$

$=(\dfrac{9\times 10}{2})^2-\dfrac{9\times 10\times 19}{6}$

$=45^2-285=2025-285=1740$，

因此從袋中1次取出1顆球，取2次，取後不放回，

其編號乘積的期望值為$\dfrac{1740}{9\times 8}=\dfrac{145}{6}$。

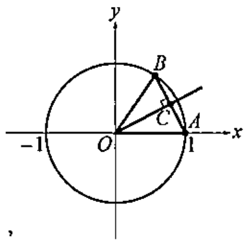
故選(2)(4)。

7. (1) ×：$\overset{\frown}{AB}$ 弧的長度為 $1\times x=x$。

等腰三角形 OAB 中，

過 O 點作 $\overline{OC}$ 垂直 $\overline{AB}$ 於 C，

因此 $\overline{AC}=\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}$。



直角三角形 OAC 中，

$\overline{AC}=\overline{OA}\times\sin\angle AOC=\sin\frac{x}{2}$，

因此 $\overline{AB}=2\sin\frac{x}{2}$。

因為 $\overline{AB}$ 的長度小於 $\overset{\frown}{AB}$ 弧的長度，

所以 $2\sin\frac{x}{2}<x\Rightarrow\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}$。

(2) ×：$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2<x+2<2+\frac{\pi}{2}$，

因為 $\frac{\pi}{2}<2$ 且 $2+\frac{\pi}{2}<\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{2}<x+2<\frac{3\pi}{2}$，因此 $\cos(x+2)<0<\sin x$。

(3) ○：因為 $(2-2\cos x)-(1-\cos^2 x)$

$=\cos^2 x-2\cos x+1=(\cos x-1)^2>0$，

所以 $2-2\cos x>1-\cos^2 x$。

(4) ○：因為 $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$，

所以 $2-2\cos x=2-2(1-2\sin^2\frac{x}{2})=4\sin^2\frac{x}{2}$

由(1)可知 $\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}\Rightarrow 4\sin^2\frac{x}{2}<4(\frac{x}{2})^2=x^2$，

因此 $2-2\cos x<x^2$。

(5) ○：$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow x^2<\frac{\pi^2}{4}\Rightarrow 2x^2<\frac{\pi^2}{2}\Rightarrow x^2<\frac{\pi^2}{2}-x^2$。

故選(3)(4)(5)。

8. (1) ○：$f'(x)=-2x$。直線 L 的斜率為 $f'(a)=-2a$，

因此直線 L 的方程式為

$y-(-a^2)=-2a(x-a)\Rightarrow y=-2ax+a^2$。

(2) ×：因為直線 L, M 兩者互相垂直，

所以兩者的斜率乘積為 -1，

因此直線 M 的斜率為 $\frac{1}{2a}$。

(3) ×：令 Q 點坐標為 $(b,-b^2)$，因為直線 M 的斜率為

$f'(b)=-2b=\frac{1}{2a}\Rightarrow b=\frac{-1}{4a}$，

所以 Q 點坐標為 $(\frac{-1}{4a},\frac{-1}{16a^2})$。

(4) ×：直線 M 的方程式為 $y+\frac{1}{16a^2}=\frac{1}{2a}(x+\frac{1}{4a})$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2a}x+\frac{1}{16a^2}$。

(5) ○：直線 L 與直線 M 解聯立方程式

$$\begin{cases}y=-2ax+a^2\\ y=\frac{1}{2a}x+\frac{1}{16a^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-2ax+a^2\\ 4a^2y=2ax+\frac{1}{4}\end{cases}$$

$\Rightarrow(4a^2+1)y=a^2+\frac{1}{4}\Rightarrow y=\frac{1}{4}$。

故選(1)(5)。

三、選填題

9. 因為 $(3,4)$ 為對稱點，所以 $y=4$ 為平衡位置，因此 $c=4$。

振幅為 $\sqrt{a^2+b^2}=5\Rightarrow a^2+b^2=25$。

因此 $a^2+b^2+c^2=25+4^2=41$。

10. $a_2=a_1=5$。當 n 為大於或等於 2 的正整數時，

因為 $a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$，

所以 $a_{n+1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=a_n+a_n=2a_n$。

所以 $a_3=2a_2=5\times2$，$a_4=2a_3=5\times2^2$，$a_5=2a_4=5\times2^3$，…，

因此當 n 為大於或等於 2 的正整數時，$a_n=5\times2^{n-2}$。

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_k}$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{5\times2^{k-2}}=\frac{1}{5}+\frac{\frac{1}{5}(1-\frac{1}{2^{k-1}})}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}(1-\frac{1}{2^{k-1}})=\frac{3}{5}-\frac{1}{5\times2^{k-2}}\geq\frac{7}{12}$

$\Rightarrow\frac{1}{5\times2^{k-2}}\leq\frac{3}{5}-\frac{7}{12}=\frac{1}{60}\Rightarrow 5\times2^{k-2}\geq60$

$\Rightarrow 2^k\geq48$，正整數 k 的最小值為 6。

11. $\lim\limits_{n\to\infty}(3^{2n+3}+2^{3n+2}+2^{n+1}\times3^n)^{\frac{-2}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(27\times9^n+4\times8^n+2\times6^n)^{\frac{-2}{n}}$，

由夾擠定理可知，因為

$9^n<27\times9^n+4\times8^n+2\times6^n<27\times9^n+4\times9^n+2\times9^n<81\times9^n$

$=9^{n+2}$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(9^n)^{\frac{-2}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}9^{-2}=\frac{1}{81}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}(9^{n+2})^{\frac{-2}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}9^{-2-\frac{4}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}9^{-2}=\frac{1}{81}$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(3^{2n+3}+2^{3n+2}+2^{n+1}\times3^n)^{\frac{-2}{n}}=\frac{1}{81}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. 因為 $\cos(\frac{-x}{3})=\cos\frac{x}{3}$，(1 分)

所以 $f(-x)=(-x)^3\cos(\frac{-x}{3})\sqrt{9-(-x)^2}$

$=-x^3\cos\frac{x}{3}\sqrt{9-x^2}$。(2 分)

13. 因為 $y=\sqrt{9-x^2}$ 為以原點為圓心，

半徑為 3 的上半圓，(1 分)

因此 $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{3^2\pi}{2}=\frac{9}{2}\pi$。(2 分)

14. 因為 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 的函數圖形為

以原點為對稱中心的點對稱圖形，(1 分)

因此若 $\int_{0}^{3}x^3\cos\frac{x}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=T$，

則 $\int_{-3}^{0}x^3\cos\frac{x}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=-T$

$\Rightarrow\int_{-3}^{3}x^3\cos\frac{x}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=(-T)+T=0$。(2 分)

又因為 $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9}{2}\pi$，

所以 $\int_{-3}^{3}(x^3\cos\frac{x}{3}+3)\sqrt{9-x^2}\,dx$

$=\int_{-3}^{3}x^3\cos\frac{x}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx+3\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$

$=0+\frac{27\pi}{2}=\frac{27}{2}\pi$。(3 分)

15. 因為直線 L 垂直平面 N 於 A，
所以直線 L 上每一個點在平面 N 的投影點皆為 A 點，
因此 G , H 兩點皆為 A 點，
$|\overrightarrow{AG}|+|\overrightarrow{AH}|+|\overrightarrow{GH}|=|\overrightarrow{AA}|+|\overrightarrow{AA}|+|\overrightarrow{AA}|=0$ 。
故選(1)。

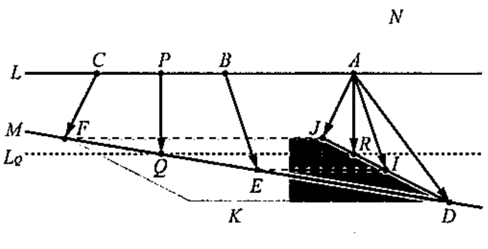
16. (1) ×：因為直線 L 與直線 EI 皆垂直平面 N，
所以直線 L 與直線 EI 互相平行。
又因為 $\angle ABE=\angle BAI=90°$，
所以 $ABEI$ 為長方形，因此 $\overline{AI}=\overline{BE}=5$。

(2) ×：因為直線 L 與直線 FJ 皆垂直平面 N，
所以直線 L 與直線 FJ 互相平行。
又因為 $\angle ACF=\angle CAJ=90°$，
所以 $ACFJ$ 為長方形，因此 $\overline{AJ}=\overline{CF}=6$。

(3) ○：過 B 點作平面 N_B，使平面 N_B 垂直直線 L。
過 C 點作平面 N_C，使平面 N_C 垂直直線 L。
因此平面 N , N_B , N_C 為三個互相平行的平面。
又因為 $\overline{AB}=\overline{BC}$，
所以 $\overline{DE}=\overline{EF}$ 。（平行平面截等比例線段性質）

(4) ×：D , E , F 在平面 N 的投影點為 D , I , J，
因此 $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ 在平面 N 的投影向量依序為 $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{IJ}$ 。
又因為 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EF}$ ，所以 $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{IJ}$ ，
因此 $\overline{AI}$ 應為 $\triangle ADJ$ 的中線，而非內角平分線。

(5) ○：如圖，令直線 L 與直線 M 的公垂線段為 $\overline{PQ}$，
其中 P 點在直線 L 上，Q 點在直線 M 上。
過 Q 點作直線 L_Q 平行直線 L，
此時直線 L_Q 亦垂直平面 N，令兩者的交點為 R，
因為直線 L 與直線 QR 皆垂直平面 N，
所以直線 L 與直線 QR 互相平行。
又因為 $\angle APQ=\angle PAR=90°$，
所以 $APQR$ 為長方形 $\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AR}$ 。
令包含直線 L_Q 與直線 M 的平面為 K，
因為平面 N 與平面 K 的交線為直線 DJ，
$\overrightarrow{PQ}$ 為平面 K 的法向量，所以 $\overrightarrow{PQ}$ 垂直直線 DJ，
因此 $\overrightarrow{AR}$ 也垂直直線 DJ
$\Rightarrow$ $\overline{AR}$ 為 $\triangle ADJ$ 在 $\overline{DJ}$ 上的高。
直線 L 與直線 M 的距離 $\overline{PQ}$ 等於
$\triangle ADJ$ 在 $\overline{DJ}$ 上的高 $\overline{AR}$ 。



故選(3)(5)。

17. 由第 16 小題可知 $\overline{AI}$ 為 $\triangle ADJ$ 的中線，
且直線 L 與 M 的距離為 $\triangle ADJ$ 在 $\overline{DJ}$ 上的高。（1 分）
$\triangle ADJ$ 中，由中線定理可知 $\overline{AD}^2+\overline{AJ}^2=2\overline{AI}^2+2\overline{DI}^2$
$\Rightarrow 8^2+6^2=2\times5^2+2\overline{DI}^2 \Rightarrow \overline{DI}=5$ ，$\overline{DJ}=2\overline{DI}=10$ 。（1 分）
因為 $\overline{AJ}^2+\overline{AD}^2=6^2+8^2=10^2=\overline{DJ}^2$ ，
所以 $\triangle ADJ$ 為直角三角形，（1 分）
因此 $\triangle ADJ$ 在 $\overline{DJ}$ 上的高為 $\dfrac{6\times8}{10}=4.8$，
直線 L 與直線 M 的距離亦為 4.8。（2 分）