全國公私立高級中學110學年度分科測驗第五次聯合模擬考試

數學甲考科解析（卷II）

考試日期：111 年 3 月 2~3 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9-1	9-2	10-1	11-1	11-2	11-3
2	4	5	125	14	24	345	12345	4	1	6	2	1	5
12	13	14	15	16	17								
			1	35									

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 此題對應的轉移矩陣為 $\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\0.6 & 0.1\end{bmatrix}$。

因為 $\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\0.6 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2\\0.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8\\0.2\end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\0.6 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8\\0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\0.6 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.65\\0.35\end{bmatrix}$，

所以 9 月 4 日晚餐吃米飯的民眾比例為 65%，

故選(2)。

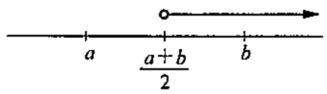
2. ① $|x-6|>|2x-6| \Rightarrow |2x-6|^2-|x-6|^2<0$

$\Rightarrow [(2x-6)-(x-6)]\times[(2x-6)+(x-6)]=x(3x-12)<0$

$\Rightarrow 0<x<4$。

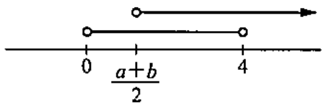
② 由 $|x-a|>|x-b|$ 的幾何意義，

可知 x 到 a 的距離大於 x 到 b 的距離 $\Rightarrow x>\dfrac{a+b}{2}$。



由①②可知 $\begin{cases}0<x<4\\ x>\dfrac{a+b}{2}\end{cases}$ 有實數解，

如圖所示，可得 $\dfrac{a+b}{2}<4 \Rightarrow a+b<8$。



a	1	2	3
b	2, 3, 4, 5, 6	3, 4, 5	4

有 9 組解。

故選(4)。

3. $0.5^x+x-6=0 \Rightarrow 6-x=0.5^x$。

$\log_2 x-x+6=0 \Rightarrow 6-x=-\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{0.5} x$。

令 $p(x)=0.5^x$，$q(x)=\log_{0.5} x$，

其函數圖形如右。

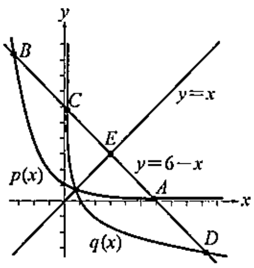
其中 $p(x)$ 與 $y=6-x$ 的交點為 A, B，

A, B 點的 x 坐標依序為 γ, δ。

$q(x)$ 與 $y=6-x$ 的交點為 C, D，

C, D 點的 x 坐標依序為 α, β。

$y=6-x$ 與 $y=x$ 的交點為 $E(3, 3)$。



因為 $p(x)=0.5^x$ 與 $q(x)=\log_{0.5} x$

兩者的函數圖形對稱於 $y=x$，

且 $y=x$ 與 $y=6-x$ 兩條直線互相垂直，

所以 A 點與 C 點對稱於直線 $y=x$，中點為 $E(3, 3)$。

B 點與 D 點對稱於直線 $y=x$，中點為 $E(3, 3)$，

因此 $\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=3$ 且 $\dfrac{\beta+\delta}{2}=3$，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=12$，

故選(5)。

二、多選題

4. 令 $f(x)$ 除以 x^3-x^2 的商式為 $g(x)$，

由除法原理可知 $f(x)=(x^3-x^2)g(x)+3x+7$。

(1) ○：$f(x)$ 係數的總和為 $f(1)=(1^3-1^2)g(1)+3+7=10$。

(2) ○：$f(x)=x^2(x-1)g(x)+3x+7$，若除式為 x^2，
則商式為 $(x-1)g(x)$，餘式為 $3x+7$。

(3) ×：反例：$f(x)=x^3-x^2+3x+7$。

(4) ×：餘式的次數需低於除式。

(5) ○：$x^2f(x)+x^2=x^2[(x^3-x^2)g(x)+3x+7]+x^2$

$=x^2(x^3-x^2)g(x)+3x^3+8x^2$

$=\dfrac{1}{3}x^2(3x^3-3x^2)g(x)+(3x^3-3x^2)+11x^2$

$=(3x^3-3x^2)(\dfrac{1}{3}x^2g(x)+1)+11x^2$，

因此 $x^2f(x)+x^2$ 除以 $3x^3-3x^2$ 的餘式必定為 $11x^2$。

故選(1)(2)(5)。

5. 因為灰色區域在直線 AB ($\alpha+\beta=1$) 左方，所以 $\alpha+\beta<1$。

因為灰色區域在直線 L ($\alpha+\beta=0$) 右方，所以 $\alpha+\beta>0$。

因為灰色區域在直線 OB ($\alpha=0$) 左方，所以 $\alpha<0$。

明顯可知選項(1)符合限制，選項(2)(3)不符合限制。

選項(4)：$\alpha=\log 0.6<\log 1=0$，

$\alpha+\beta=\log 0.6+\log 8=\log 4.8$，

因為 $0=\log 1<\log 4.8<\log 10=1$，

所以 $0<\alpha+\beta<1$。

選項(5)：$\alpha=2^{-10}=\dfrac{1}{1024}>0$，不符合 $\alpha<0$。

故選(1)(4)。

6. (1) ×：從袋中取出 1 顆球，其編號的期望值為
$\dfrac{1+2+3+\cdots+9}{9}=5$。

(2) ○：$\dfrac{1+2+3+\cdots+9}{9}\times 3=5\times 3=15$。

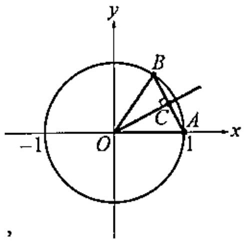
(3) ×：$\dfrac{1+2+3+\cdots+9}{9}\times 2=5\times 2=10$。

(4) ○：$(1\times 1+\cdots+1\times 9)+(2\times 1+\cdots+2\times 9)+\cdots$
$+(9\times 1+\cdots+9\times 9)$
$=(1+2+3+\cdots+9)(1+2+3+\cdots+9)$
$=45^2$，
因此從袋中 1 次取出 1 顆球，取 2 次，取後放回，
其編號乘積的期望值為 $\dfrac{45^2}{9\times 9}=5^2=25$。

(5) ×：$(1\times 1+\cdots+1\times 9)+(2\times 1+\cdots+2\times 9)+\cdots$
$+(9\times 1+\cdots+9\times 9)-(1^2+2^2+\cdots+9^2)$
$=(1+2+\cdots+9)^2-(1^2+2^2+\cdots+9^2)$
$=(\dfrac{9\times 10}{2})^2-\dfrac{9\times 10\times 19}{6}$
$=45^2-285=2025-285=1740$，
因此從袋中 1 次取出 1 顆球，取 2 次，取後不放回，
其編號乘積的期望值為 $\dfrac{1740}{9\times 8}=\dfrac{145}{6}$。

故選(2)(4)。

7. (1) ×：$\overset{\frown}{AB}$ 弧的長度為 $1\times x=x$。
等腰三角形 OAB 中，
過 O 點作 $\overline{OC}$ 垂直 $\overline{AB}$ 於 C，
因此 $\overline{AC}=\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$ 。
直角三角形 OAC 中，
$\overline{AC}=\overline{OA}\times\sin\angle AOC=\sin\dfrac{x}{2}$ ，
因此 $\overline{AB}=2\sin\dfrac{x}{2}$ 。
因為 $\overline{AB}$ 的長度小於 $\overset{\frown}{AB}$ 弧的長度，
所以 $2\sin\dfrac{x}{2}<x\Rightarrow\sin\dfrac{x}{2}<\dfrac{x}{2}$ 。



(2) ×：$0<x<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 2<x+2<2+\dfrac{\pi}{2}$ ，
因為 $\dfrac{\pi}{2}<2$ 且 $2+\dfrac{\pi}{2}<\pi+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}$ ，
所以 $\dfrac{\pi}{2}<x+2<\dfrac{3\pi}{2}$ ，因此 $\cos(x+2)<0<\sin x$。

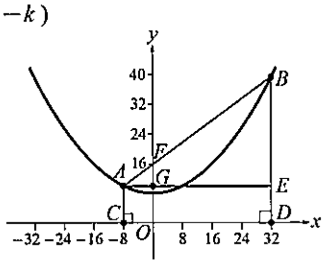
(3) ○：因為 $(2-2\cos x)-(1-\cos^2 x)$
$=\cos^2 x-2\cos x+1=(\cos x-1)^2>0$，
所以 $2-2\cos x>1-\cos^2 x$。

(4) ○：因為 $\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$ ，
所以 $2-2\cos x=2-2(1-2\sin^2\dfrac{x}{2})=4\sin^2\dfrac{x}{2}$
由(1)可知 $\sin\dfrac{x}{2}<\dfrac{x}{2}\Rightarrow 4\sin^2\dfrac{x}{2}<4(\dfrac{x}{2})^2=x^2$ ，
因此 $2-2\cos x<x^2$。

(5) ○：$0<x<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x^2<\dfrac{\pi^2}{4}\Rightarrow 2x^2<\dfrac{\pi^2}{2}\Rightarrow x^2<\dfrac{\pi^2}{2}-x^2$ 。

故選(3)(4)(5)。

8. 如圖，令拋物線 $\Gamma: x^2=4c(y-k)$
的準線為 x 軸，
$\overline{AC}$ 垂直 x 軸於 $C(a,0)$，
$\overline{BD}$ 垂直 x 軸於 $D(b,0)$，
$\overline{AE}$ 垂直 $\overline{BD}$ 於 $E(b,10)$，
$\overline{AF}=\overline{AC}=10$，
$\overline{BF}=\overline{BD}=40$。



(1) ○：直角三角形 ABE 中，
斜邊 $\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=10+40=50$，
$\overline{BE}=\overline{BD}-\overline{AC}=40-10=30$，
因此 $\overline{AE}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BE}^2}=\sqrt{50^2-30^2}=40$ ，
直線 M 的斜率為 $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\dfrac{30}{40}=\dfrac{3}{4}$ 。

(2) ○：令 $\overline{AE}$ 與 y 軸相交於 G。
因為 $\overline{AG}:\overline{GE}=\overline{AF}:\overline{FB}=10:40=1:4$，
所以 $\overline{AG}=\dfrac{1}{5}\overline{AE}=8$，$a=-8$，$A(-8,10)$。

(3) ○：$\overline{GE}=\dfrac{4}{5}\overline{AE}=32$，$b=32$，$B(32,40)$。

(4) ○：焦點 $F=\dfrac{4A+1B}{4+1}=(0,16)$。

(5) ○：頂點為 $(0,\dfrac{0+16}{2})=(0,8)$ 。

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

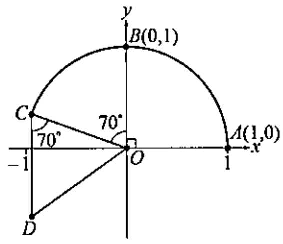
三、選填題

9. 因為 $(3,4)$ 為對稱點，所以 $y=4$ 為平衡位置，因此 $c=4$。
振幅為 $\sqrt{a^2+b^2}=5\Rightarrow a^2+b^2=25$。
因此 $a^2+b^2+c^2=25+4^2=41$。

10. $a_2=a_1=5$。當 n 為大於或等於 2 的正整數時，
因為 $a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$，
所以 $a_{n+1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=a_n+a_n=2a_n$。
所以 $a_3=2a_2=5\times 2$，$a_4=2a_3=5\times 2^2$，$a_5=2a_4=5\times 2^3$，…，
因此當 n 為大於或等於 2 的正整數時，$a_n=5\times 2^{n-2}$。

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_k}$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{5\times 2^{k-2}}=\frac{1}{5}+\frac{\frac{1}{5}(1-\frac{1}{2^{k-1}})}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}(1-\frac{1}{2^{k-1}})=\frac{3}{5}-\frac{1}{5\times 2^{k-2}}\geq\frac{7}{12}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{5\times 2^{k-2}}\leq\frac{3}{5}-\frac{7}{12}=\frac{1}{60}\Rightarrow 5\times 2^{k-2}\geq 60$$
$\Rightarrow 2^k\geq 48$ ，正整數 k 的最小值為 6。

11. 如圖所示，O 點為原點，
$A(1,0)$，$B(0,1)$，
$\cos 160^\circ+i\sin 160^\circ$
在複數平面上所對應的點為 C 點，
$-i+\cos 160^\circ+i\sin 160^\circ$
在複數平面上所對應的點為 D 點，
因此 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{CD}=1$，



$\triangle OCD$ 為等腰三角形，$\overline{CD}$ 平行 y 軸。
因為 $\angle BOC=\angle AOC-90^\circ=160^\circ-90^\circ=70^\circ$，
所以 $\angle OCD=\angle BOC=70^\circ$，
$\angle COD=\angle CDO=\dfrac{180^\circ-70^\circ}{2}=55^\circ$，
因此 $-i+\cos 160^\circ+i\sin 160^\circ$ 的主幅角為 $160^\circ+55^\circ=215^\circ$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. 因為連續抽 n 次，取得紅球次數的期望值為 $np=80$，
標準差為 $\sqrt{np(1-p)}=4\Rightarrow np(1-p)=16$，(1 分)
所以 $1-p=\dfrac{16}{np}=\dfrac{16}{80}=\dfrac{1}{5}\Rightarrow p=\dfrac{4}{5}$ 。(2 分)

13. $\dfrac{60}{a}=p=\dfrac{4}{5}\Rightarrow a=75$。(1 分)
$np=\dfrac{4}{5}n=80\Rightarrow n=100$。(2 分)

14. 因為 $p=\dfrac{4}{5}$ 且 $n=100$，
所以 $f(k)=\dfrac{100!}{k!(100-k)!}(\dfrac{4}{5})^k(\dfrac{1}{5})^{100-k}=\dfrac{100!\times 4^k}{k!(100-k)!\times 5^{100}}$ 。

(1) $f(M)\geq f(M-1)$
$$\Rightarrow\frac{100!\times 4^M}{M!(100-M)!\times 5^{100}}\geq\frac{100!\times 4^{M-1}}{(M-1)!(101-M)!\times 5^{100}}$$
$$\Rightarrow\frac{4}{M}\geq\frac{1}{101-M}\Rightarrow 404-4M\geq M\Rightarrow M\leq\frac{404}{5}$$ 。(3 分)

(2) $f(M)\geq f(M+1)$
$$\Rightarrow\frac{100!\times 4^M}{M!(100-M)!\times 5^{100}}\geq\frac{100!\times 4^{M+1}}{(M+1)!(99-M)!\times 5^{100}}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{100-M}\geq\frac{4}{M+1}\Rightarrow M+1\geq 400-4M\Rightarrow M\geq\frac{399}{5}$$ 。

因為 $\dfrac{399}{5}\leq M\leq\dfrac{404}{5}$ 且 M 為整數，所以 $M=80$。(3 分)

15. 因為直線 L 垂直平面 N 於 A，
所以直線 L 上每一個點在平面 N 的投影點皆為 A 點，
因此 G , H 兩點皆為 A 點，
$|\overrightarrow{AG}|+|\overrightarrow{AH}|+|\overrightarrow{GH}|=|\overrightarrow{AA}|+|\overrightarrow{AA}|+|\overrightarrow{AA}|=0$ 。
故選(1)。

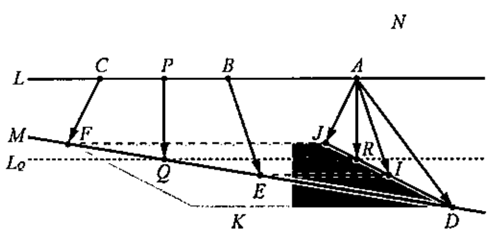
16. (1) ×：因為直線 L 與直線 EI 皆垂直平面 N，
所以直線 L 與直線 EI 互相平行。
又因為 $\angle ABE=\angle BAI=90°$，
所以 $ABEI$ 為長方形，因此 $\overline{AI}=\overline{BE}=5$。

(2) ×：因為直線 L 與直線 FJ 皆垂直平面 N，
所以直線 L 與直線 FJ 互相平行。
又因為 $\angle ACF=\angle CAJ=90°$，
所以 $ACFJ$ 為長方形，因此 $\overline{AJ}=\overline{CF}=6$。

(3) ○：過 B 點作平面 N_B，使平面 N_B 垂直直線 L。
過 C 點作平面 N_C，使平面 N_C 垂直直線 L。
因此平面 N , N_B , N_C 為三個互相平行的平面。
又因為 $\overline{AB}=\overline{BC}$，
所以 $\overline{DE}=\overline{EF}$ 。（平行平面截等比例線段性質）

(4) ×：D , E , F 在平面 N 的投影點為 D , I , J，
因此 $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ 在平面 N 的投影向量依序為 $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{IJ}$ 。
又因為 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EF}$ ，所以 $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{IJ}$ ，
因此 $\overline{AI}$ 應為△ADJ 的中線，而非內角平分線。

(5) ○：如圖，令直線 L 與直線 M 的公垂線段為 $\overline{PQ}$ ，
其中 P 點在直線 L 上，Q 點在直線 M 上。
過 Q 點作直線 L_Q 平行直線 L，
此時直線 L_Q 亦垂直平面 N，令兩者的交點為 R，
因為直線 L 與直線 QR 皆垂直平面 N，
所以直線 L 與直線 QR 互相平行。
又因為 $\angle APQ=\angle PAR=90°$，
所以 $APQR$ 為長方形 $\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AR}$ 。
令包含直線 L_Q 與直線 M 的平面為 K，
因為平面 N 與平面 K 的交線為直線 DJ，
$\overrightarrow{PQ}$ 為平面 K 的法向量，所以 $\overrightarrow{PQ}$ 垂直直線 DJ，
因此 $\overrightarrow{AR}$ 也垂直直線 DJ
$\Rightarrow$ $\overline{AR}$ 為△ADJ 在 $\overline{DJ}$ 上的高。
直線 L 與直線 M 的距離 $\overline{PQ}$ 等於
△ADJ 在 $\overline{DJ}$ 上的高 $\overline{AR}$ 。



故選(3)(5)。

17. 由第 16 小題可知 $\overline{AI}$ 為△ADJ 的中線，
且直線 L 與 M 的距離為△ADJ 在 $\overline{DJ}$ 上的高。（1 分）
△ADJ 中，由中線定理可知 $\overline{AD}^2+\overline{AJ}^2=2\overline{AI}^2+2\overline{DI}^2$
$\Rightarrow 8^2+6^2=2\times5^2+2\overline{DI}^2 \Rightarrow \overline{DI}=5$ ，$\overline{DJ}=2\overline{DI}=10$ 。（1 分）
因為 $\overline{AJ}^2+\overline{AD}^2=6^2+8^2=10^2=\overline{DJ}^2$ ，
所以△ADJ 為直角三角形，（1 分）
因此△ADJ 在 $\overline{DJ}$ 上的高為 $\dfrac{6\times8}{10}=4.8$ ，
直線 L 與直線 M 的距離亦為 4.8。（2 分）