臺中市立高級中學 110 學年度分科測驗第二次聯合複習考數學甲

RA5119

第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 若 σ_n 為數據 $\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，……，$\frac{n}{n}$ 的標準差，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma_n)^2=$？

   (1)$\frac{1}{2}$　(2)$\frac{1}{3}$　(3)$\frac{1}{8}$　(4)$\frac{1}{12}$　(5)$\frac{1}{20}$。

2. 已知某地區共有甲、乙兩鎮，且自 2020 年起，在未來 10 年內均因某因素，其人口總數將會維持不變。若根據每年人口調查的紀錄發現以下規律：過去一年間，甲鎮有 20% 的居民會搬移至乙鎮，且乙鎮會有 60% 的居民仍維持住在乙鎮，未來也會有此搬移規律。由最新資料顯示，在 2022 年的人口調查中，此地區有 60% 的居民居住於甲鎮。阿竣想依上述資訊，推算 2020 年的人口數，試問：在 2020 年的人口調查時，$\frac{\text{乙鎮人口數}}{\text{此地區人口總數}}$ 為下列哪個選項？ (1)$\frac{1}{4}$　(2)$\frac{1}{2}$　(3)$\frac{2}{3}$　(4)$\frac{3}{4}$　(5)$\frac{4}{5}$。

3. 設多項式函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+10$，若滿足 $f(x)$ 為遞增函數的數對 (a,b)，將其繪製於橫坐標為 a 軸、縱坐標為 b 軸的新坐標平面上，並將其區域令為 S，則有關 S 與不等式 $2a-b+9\ge 0$ 的解所交集的區域面積為多少平方單位？

   (1)90　(2)96　(3)102　(4)168　(5)180。

二、多選題(占 40 分)

4. 2020 年開始，新冠肺炎肆虐全球，觀察某國的確診人數發現，確診人數於某段時間接近指數成長，現在假設某國在 2020 年 3 月 x 日的確診人數近似於 $3\times 2^{\frac{x}{3}}$（單位：千人），現在考慮數列〈a_n〉，其中 $a_n=3\times 2^{\frac{n}{3}}$，請選出正確的選項。

   (1)〈a_n〉為等比數列，且其公比大於 $\sqrt[4]{3}$　(2)a_2 相較於 a_1 成長了超過 20%

   (3)若 $b_n=\log a_n$，則 b_n 為公差小於 0.1 的等差數列

   (4)承(3)，將點 (n,b_n) 描繪於坐標平面上，所形成的圖形會落在某一直線上

   (5)$a_{30}=2a_{27}$。

5. 下列各函數圖形中，請選出週期為 2π 的選項。

   (1)$f_1(x)=\cos x+|\cos x|$　(2)$f_2(x)=\sin x\cos x$　(3)$f_3(x)=\left|\frac{1}{2}+\sin x\right|$

   (4)$f_4(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$　(5)$f_5(x)=\sin x\cdot(\sin x+\cos x)$。

6. 設 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 均為實係數三次多項式，$g(x)$ 為實係數二次多項式。已知 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式分別為 $Q_1(x)$、$Q_2(x)$，餘式分別為 $r_1(x)$、$r_2(x)$，且 a 為非零實數，請選出正確的選項。

   (1)$af_1(x)$ 除以 $Q_1(x)$，餘式為 $ar_1(x)$　(2)$f_1(x)+r_1(x)$ 除以 $ag(x)$ 的餘式為 $2r_1(x)$

   (3)若 $xf_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $xr_2(x)$，則 $r_2(x)$ 為常數多項式

   (4)$Q_2(x)f_1(x)-Q_1(x)f_2(x)$ 可能為三次多項式

   (5)若 $f_2(x)$ 有一次因式 $x-a$，則 $r_2(a)=0$。

7. 已知 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{c}$ 為空間中三個不平行的非零向量，則下列何者正確？

(1) $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|+(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2=|\overrightarrow{a}|^2\cdot|\overrightarrow{b}|^2$　(2)對任意實數 m 、 n ，$(m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=0$

(3)若已知 $|\overrightarrow{a}|$ 和 $|\overrightarrow{b}|$ ，則當 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 越小時，$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$ 越大

(4) $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c}$　(5) $\overrightarrow{c}$ 在 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 上的正射影長為 $\dfrac{\left|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}\right|}{|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|}$ 。

8. 投擲一個正六體骰子，每面朝上的機會均等。已知這六面的數字分別為1、1、2、3、5、8，設擲此骰子三次，其朝上的數字分別為 X 、 Y 、 Z ，請選出正確的選項。

(1)滿足 $X<Y<Z$ 的機率為 $\dfrac{C^5_3}{6^3}$

(2)在 $X<Y<Z$ 的條件下，滿足 X 、 Y 、 Z 均為奇數的機率為 $\dfrac{1}{8}$

(3)滿足 $X+Y+Z$ 為偶數的機率大於 $\dfrac{1}{2}$　(4)滿足 $X=Y$ 的機率為 $\dfrac{5}{6}$

(5)在 $X+Y+Z$ 為偶數的條件下，滿足 $X=Y$ 的機率為 $\dfrac{2}{13}$ 。

三、選填題（占 18 分）

9. 已知平面上三點 $A(2,3)$ 、 $B(4,1)$ 、 $P\left(\cos^2\theta,\sin\theta\cos\theta\right)$ ，$0\le\theta\le 2\pi$ ，

則 ΔABP 面積的最小值為________。（化為最簡根式）

10. 已知空間中兩點 $A(1,2,3)$ 、 $B(2,1,-1)$ ，且有一動點 $P(t,2t+1,2t)$ ，t 為實數。

若 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值時，此時 $t=$________。（化為最簡根式）

11. 在某夜市攤位舉辦了一場「紅包大放送」活動，每位顧客均可參與此活動一次。

每位顧客參與活動時，均可擲一枚不均勻銅板兩次，每次投擲互不影響，

已知此枚不均勻銅板出現正面的機率為 $\dfrac{2}{5}$ ，並有下述規則：

(1)若出現兩個反面可得獎金200元，並停止投擲；

(2)若出現一正一反可得獎金300元，並停止投擲；

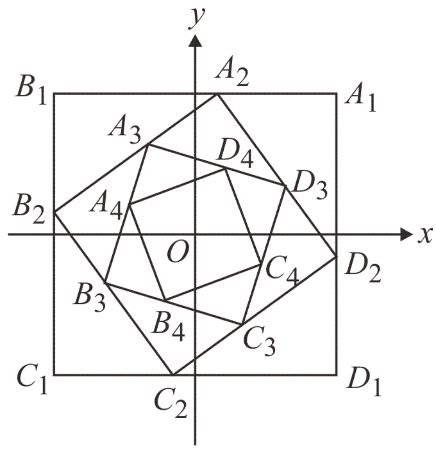
(3)若出現兩個正面可得獎金500元，並且獲得擲一次兩顆公正骰子的機會，若擲得點數和為質數，可再得獎金250元並停止投擲；若擲得點數和為合數，可再得獎金100元並停止投擲。

依上述規則，試問：每位參加活動的顧客可獲得獎金的期望值為________元。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

如圖（示意圖），$A_nB_nC_nD_n$ 均為正方形，n 為正整數，其中 A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}、D_{n+1} 分別在 $\overline{A_nB_n}$、$\overline{B_nC_n}$、$\overline{C_nD_n}$、$\overline{D_nA_n}$ 上，且滿足 $\overline{A_nA_{n+1}}:\overline{A_{n+1}B_n}=\overline{B_nB_{n+1}}:\overline{B_{n+1}C_n}=\overline{C_nC_{n+1}}:\overline{C_{n+1}D_n}=\overline{D_nD_{n+1}}:\overline{D_{n+1}A_n}=3:4$。若將這些正方形置於坐標平面上，且 $\overline{A_1B_1}\,//\,\overline{C_1D_1}\,//\,x$ 軸，$\overline{B_1C_1}\,//\,\overline{A_1D_1}\,//\,y$ 軸，且所有正方形中心均為坐標原點，試回答下列問題：



12.若 $\overline{OA_2}=r\,\overline{OA_1}$，則實數 $r=$________。（化為最簡分數）

13.若 $\overline{A_1B_1}=4\sqrt{3}$，試求所有(無窮)正方形的面積總和。

14.已知 O 為坐標原點，設 $\overrightarrow{OA_n}=\left(x_n, y_n\right)$，$n$ 為正整數。

若有一平面線性變換 T 滿足 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$，試求 T。

15-17 題為題組

坐標平面上有一圓方程式 $\Gamma: x^2+y^2-2x-6y+8=0$，以及一直線 $L: y=mx$，$m>0$。試回答下列問題：

15.若直線 L 與圓 Γ 兩圖形恰交於一點，試求 m 值。

16.承 15.，試求直線 L 與圓 Γ 的交點坐標。

17.承 15.，若直線 L、圓 Γ 外部與 y 軸所圍成的封閉區域為 R，

試求將 R 繞 x 軸旋轉一圈的旋轉體體積。

RA5119　臺中市立高級中學 **110** 學年度分科測驗第二次聯合複習考

數學甲　參考答案

選擇題：1. (4)　2. (4)　3. (2)　4. (2)(4)(5)　5. (1)(3)　6. (2)(3)　7. (1)(2)(5)　8. (2)(5)

選填題：9. $\dfrac{9-\sqrt{2}}{2}$　10. $\dfrac{5-\sqrt{10}}{3}$　11. 322

混合題或非選擇題：12. $\dfrac{5}{7}$　13. 98　14. $\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}4 & -3\\3 & 4\end{bmatrix}$

15. 1　16. $(2,2)$　17. $\dfrac{38}{3}\pi-3\pi^2$