數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(4)	(2)	(2)(4)(5)	(1)(3)	(2)(3)	(1)(2)(5)
8.						
(2)(5)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (4)

出處：第二冊〈數據分析〉、選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：標準差和極限的運用

解析：$\sigma_n=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1^2}{n^2}+\dfrac{2^2}{n^2}+\cdots\cdots+\dfrac{n^2}{n^2}\right)-\left(\dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{n}}{n}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}-\left(\dfrac{n(n+1)}{2n^2}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma_n)^2=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

故選(4)。

2. (4)

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：轉移矩陣與反方陣運算

解析：轉移矩陣 $T=\begin{bmatrix}0.8 & 0.4\\0.2 & 0.6\end{bmatrix}$，2020 年的人口比例為

$A_0=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，2022 年的人口比例為 $A_2=\begin{bmatrix}0.6\\0.4\end{bmatrix}$

則 $A_2=T^2A_0\Rightarrow A_0=(T^{-1})^2A_2$

又 $T^{-1}=\dfrac{1}{0.4}\begin{bmatrix}0.6 & -0.4\\-0.2 & 0.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{3}{2} & -1\\-\dfrac{1}{2} & 2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow(T^{-1})^2=\begin{bmatrix}\dfrac{11}{4} & \dfrac{-7}{2}\\\dfrac{-7}{4} & \dfrac{9}{2}\end{bmatrix}$

因此 $A_0=\begin{bmatrix}\dfrac{11}{4} & \dfrac{-7}{2}\\\dfrac{-7}{4} & \dfrac{9}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6\\0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.25\\0.75\end{bmatrix}$

故選(4)。

3. (2)

出處：選修數學甲(上)〈微分〉、〈積分〉

目標：微分意義與積分應用

解析：若 $f(x)$ 為遞增函數，則 $f'(x)=3x^2+2ax+b\geq 0$ 恆成立

因此 $(2a)^2-4\cdot 3\cdot b\leq 0\Rightarrow a^2-3b\leq 0$

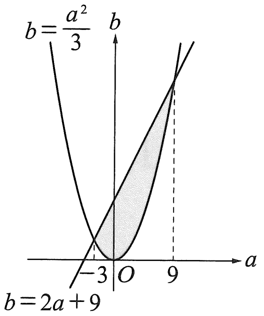
所求為 $\begin{cases}a^2-3b\leq 0\\2a-b+9\geq 0\end{cases}$ 解的區域面積

先解 $\begin{cases}a^2-3b=0\\2a-b+9=0\end{cases}$，將 $b=2a+9$ 代入 $a^2-3b=0$

$\Rightarrow a^2-6a-27=0\Rightarrow(a-9)(a+3)=0$

$\Rightarrow a=9$ 或 $a=-3$，即兩圖形交於 $(-3,3)$、$(9,27)$

如下圖



因此所求面積為

$\int_{-3}^{9}\left(2a+9-\dfrac{a^2}{3}\right)da$

$=\left(-\dfrac{a^3}{9}+a^2+9a\right)\Big|_{-3}^{9}$

$=\left(-\dfrac{729}{9}+81+81\right)-\left(\dfrac{27}{9}+9-27\right)$

$=81-(-15)=96$ 平方單位，故選(2)。

二、多選題

4. (2)(4)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指對數的基本運用

解析：(1)╳：$r=2^{\frac{1}{3}}$

$\because 2^{\frac{1}{3}}=(2^4)^{\frac{1}{12}}=16^{\frac{1}{12}}$ 且 $\sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{4}}=(3^3)^{\frac{1}{12}}=27^{\frac{1}{12}}$

$\therefore 2^{\frac{1}{3}}<\sqrt[4]{3}$

(2)○：$\dfrac{a_2-a_1}{a_1}=\dfrac{3\times 2^{\frac{2}{3}}-3\times 2^{\frac{1}{3}}}{3\times 2^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}=2^{\frac{1}{3}}-1$

$>1.2-1=0.2$

(3)╳：$b_{n+1}-b_n=\log a_{n+1}-\log a_n=\log\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\log 2^{\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{1}{3}\log 2>\dfrac{1}{3}\times 0.3=0.1$

(4)○：由(3)可知 (n,b_n) 所成的圖形，會落在斜率大於 0 的直線上

(5)○：$a_{30}=3\times 2^{10}=2\times(3\times 2^9)=2a_{27}$

故選(2)(4)(5)。

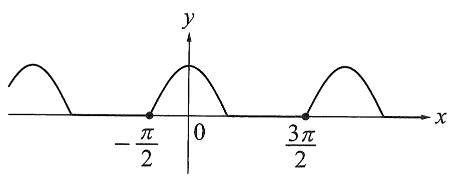
5. (1)(3)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：能畫出三角函數的變化圖形並判斷週期

解析：(1)○：$f_1(x)=\cos x+|\cos x|=\begin{cases}2\cos x\text{，}\cos x\geq 0\\0\text{　　，}\cos x<0\end{cases}$

(由下圖可知週期為 2π)



(2)╳：$f_2(x)=\sin x\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}$，週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(3)○：$f_3(x)=\left|\dfrac{1}{2}+\sin x\right|$ 是由 $y=\sin x$ 先上移 $\dfrac{1}{2}$、再取絕對值，因此週期為 2π

(4) ╳：$f_4(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-\dfrac{\sin^2 2x}{2}=1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\cos 4x}{2}$

$=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4x$

因此 $f_4(x)$ 週期為 $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

(5) ╳：$f_5(x)=\sin x\cdot(\sin x+\cos x)=\sin^2 x+\sin x\cos x$

$=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{2}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin 2x-\cos 2x}{2}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2}$

因此週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

故選(1)(3)。

6. (2)(3)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理與餘因式定理應用

解析：利用除法原理，可設

$f_1(x)=g(x)\cdot Q_1(x)+r_1(x)$，$f_2(x)=g(x)\cdot Q_2(x)+r_2(x)$

(1) ╳：$af_1(x)=ag(x)\cdot Q_1(x)+ar_1(x)$

$=Q_1(x)\cdot(ag(x))+ar_1(x)$

$\because g(x)$ 為二次多項式

$\therefore r_1(x)$ 次數至多為一次，且 $Q_1(x)$ 為一次多項式

故 $ar_1(x)$ 不一定為所求餘式

(2) ○：$f_1(x)+r_1(x)=(g(x)\,Q_1(x)+r_1(x))+r_1(x)$

$=ag(x)\cdot\left(\dfrac{1}{a}Q_1(x)\right)+2r_1(x)$

故 $f_1(x)+r_1(x)$ 除以 $ag(x)$ 的餘式為 $2r_1(x)$

(3) ○：$xf_2(x)=xg(x)\,Q_2(x)+xr_2(x)=g(x)\cdot(xQ_2(x))+xr_2(x)$

$\because g(x)$ 為二次多項式　$\therefore r_2(x)$ 次數至多為一次

$\Rightarrow xr_2(x)$ 次數至多二次

又 $\because xf_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $xr_2(x)$，表示 $xr_2(x)$ 次數必須低於二次

$\therefore r_2(x)$必須為常數多項式

(4) ╳：$Q_2(x)\,f_1(x)-Q_1(x)\,f_2(x)$

$=Q_2(x)\cdot(g(x)\,Q_1(x)+r_1(x))$

$\quad-Q_1(x)\cdot(g(x)\,Q_2(x)+r_2(x))$

$=(\cancel{Q_2(x)\,g(x)\,Q_1(x)}+Q_2(x)\,r_1(x))$

$\quad-(\cancel{Q_1(x)\,g(x)\,Q_2(x)}+Q_1(x)\,r_2(x))$

$=Q_2(x)\,r_1(x)-Q_1(x)\,r_2(x)$

$\because Q_1(x)$，$Q_2(x)$ 均為一次多項式，且 $r_1(x)$，$r_2(x)$ 的次數均至多為一次

$\therefore Q_2(x)\,r_1(x)-Q_1(x)\,r_2(x)$ 不可能為三次多項式

(5) ╳：$\because f_2(x)$ 有一次因式 $x-a$　$\therefore f_2(a)=0$

又 $f_2(x)=g(x)\,Q_2(x)+r_2(x)$

故 $g(a)\,Q_2(a)+r_2(a)=0$，但 $r_2(a)$ 不一定為 0

故選(2)(3)。

7. (1)(2)(5)

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：理解內積、外積性質

解析：(1) ○：$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|^2+(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2$

$=(|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta)^2+(|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta)^2$

$=|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2$

(2) ○：$\because(m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b})\perp(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$

$\therefore(m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=0$

(3) ╳：由(1)可知：應改為 $(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2$ 越小時，$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$ 越大

(4) ╳：外積沒有結合律

(5) ○：由正射影長的公式可得知

故選(1)(2)(5)。

8. (2)(5)

出處：第四冊〈機率〉

目標：瞭解古典機率與條件機率計算

解析：(1) ╳：$P(X<Y<Z)=\underbrace{\dfrac{C^4_3}{6^3}}_{\text{沒有選到 1}}+\underbrace{\dfrac{C^2_1\times C^4_2}{6^3}}_{\text{有選到 1}}=\dfrac{4+12}{6^3}\neq\dfrac{C^5_3}{6^3}$

(2) ○：$P(X$，Y，Z 均為奇數 $|\,X<Y<Z)$

$=\dfrac{C^2_1C^2_2}{C^4_3+C^2_1C^4_2}=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}$

(3) ╳：$X+Y+Z$ 為偶數，則

X，Y，Z 為「3 偶」或「2 奇 1 偶」

$P(3\text{ 偶})=\left(\dfrac{2}{6}\right)^3=\dfrac{1}{27}$

$P(2\text{ 奇 }1\text{ 偶})=C^3_2\cdot\left(\dfrac{4}{6}\right)^2\cdot C^1_1\cdot\left(\dfrac{2}{6}\right)$

$=3\times\dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{12}{27}$

$\therefore P(X+Y+Z\text{ 為偶數})=\dfrac{13}{27}<\dfrac{1}{2}$

(4) ╳：$P(X=Y)=\underbrace{\left(\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}\times 1\right)}_{X=Y=1}+C^4_1\cdot\underbrace{\left(\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 1\right)}_{X=Y=(\text{非 }1)}$

$=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

(5) ○：$P(X=Y\,|\,X+Y+Z\text{ 為偶數})=$

$$\frac{\underbrace{\dfrac{2\times2\times2}{6^3}}_{1,1,\text{偶}}+\underbrace{2\times\dfrac{1\times1\times2}{6^3}}_{3,3,\text{偶或}5,5,\text{偶}}+\underbrace{2\times\dfrac{1\times1\times2}{6^3}}_{2,2,\text{偶或}8,8,\text{偶}}}{\dfrac{13}{27}}$$

$=\dfrac{\dfrac{16}{216}}{\dfrac{13}{27}}=\dfrac{2}{13}$

故選(2)(5)。

三、選填題

9. $\dfrac{9-\sqrt{2}}{2}$

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：利用三角形面積公式和三角函數運算求極值

解析：$\overrightarrow{AB}=(2,-2)$，$\overrightarrow{AP}=(\cos^2\theta-2,\sin\theta\cos\theta-3)$

$$\triangle ABP\text{ 面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & -2\\ \cos^2\theta-2 & \sin\theta\cos\theta-3\end{vmatrix}\right|$$
$$=\frac{1}{2}|2\sin\theta\cos\theta-6+2\cos^2\theta-4|$$
$$=|\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-5|$$
$$=\left|\frac{\sin 2\theta+\cos 2\theta+1}{2}-5\right|$$
$$=\left|\frac{\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{2}-\frac{9}{2}\right|\geq\frac{9-\sqrt{2}}{2}$$

故△ABP 面積的最小值為 $\frac{9-\sqrt{2}}{2}$。

10. $\frac{5-\sqrt{10}}{3}$

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：能處理極值問題

解析：$\overline{PA}+\overline{PB}=\sqrt{(t-1)^2+(2t-1)^2+(2t-3)^2}$
$$+\sqrt{(t-2)^2+(2t)^2+(2t+1)^2}$$
$$=\sqrt{9t^2-18t+11}+\sqrt{9t^2+5}$$
$$=3\left(\sqrt{t^2-2t+\frac{11}{9}}+\sqrt{t^2+\frac{5}{9}}\right)$$
$$=3\left(\sqrt{(t-1)^2+\frac{2}{9}}+\sqrt{t^2+\frac{5}{9}}\right)$$

考慮平面上三點 $C(t,0)$、$D\left(1,\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$、$E\left(0,-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

則 $\overline{PA}+\overline{PB}=3(\overline{CD}+\overline{CE})$

當 $E-C-D$ (E、C、D 三點共線)時

$\overline{CD}+\overline{CE}$ 有最小值，此時 $\overline{CE}:\overline{CD}=\sqrt{5}:\sqrt{2}$

即 $t=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}=\frac{5-\sqrt{10}}{3}$。

11. 322

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：瞭解機率與期望值的計算

解析：$P(\text{兩反})=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

$P(\text{一正一反})=2\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$

$P(\text{兩正})=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

∵2～12 的質數有 2，3，5，7，11

其點數和為質數的情況有 1＋2＋4＋6＋2＝15 種

$\therefore P(\text{點數和為質數})=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

$P(\text{點數和為合數})=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

情況	兩反	一正一反	兩正且質數	兩正且合數
金額	200	300	750	600
機率	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}\times\frac{5}{12}$	$\frac{4}{25}\times\frac{7}{12}$

期望值為

$$200\times\frac{9}{25}+300\times\frac{12}{25}+750\times\frac{4}{25}\times\frac{5}{12}+600\times\frac{4}{25}\times\frac{7}{12}$$
$$=72+144+50+56=322\text{ (元)。}$$

第貳部分、混合題或非選擇題

12. $\frac{5}{7}$

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：能依圖形得到簡易比例關係(等比)

解析：$\overline{A_2B_1}:\overline{B_1B_2}:\overline{B_2A_2}=4:3:5$

∴正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 邊長：正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 邊長 ＝7：5

此時 $\overline{OA_1}:\overline{OA_2}=7:5\Rightarrow\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}}=\frac{5}{7}$。

13. 98

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：無窮等比級數的計算

解析：每一個正方形的邊長與前一個正方形的邊長比值為 $\frac{5}{7}$

則面積比值為 $\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{25}{49}$

又第一個正方形的邊長為 $4\sqrt{3}$

因此所求為 $\frac{(4\sqrt{3})^2}{1-\frac{25}{49}}=\frac{48}{\frac{24}{49}}=98$。

◎評分原則

每一個正方形的邊長與前一個正方形的邊長比值為 $\frac{5}{7}$

則面積比值為 $\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{25}{49}$ (2 分)

又第一個正方形的邊長為 $4\sqrt{3}$

因此所求為 $\frac{(4\sqrt{3})^2}{1-\frac{25}{49}}=\frac{48}{\frac{24}{49}}=98$。 (2 分)

14. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：矩陣的平面線性變換

解析：$\overrightarrow{OA_n}$ 變成 $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ 必須對坐標原點伸縮，其伸縮為 $\frac{5}{7}$ 倍

對應的伸縮矩陣為 $\begin{bmatrix}\frac{5}{7} & 0\\ 0 & \frac{5}{7}\end{bmatrix}$

並繞原點逆時針旋轉 $\theta=\angle A_nOA_{n+1}$，設 $\overline{A_nB_n}=7a$

則 $\overline{A_nA_{n+1}}=3a$，$\overline{OA_n}=\frac{7\sqrt{2}}{2}a$，$\overline{OA_{n+1}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}a$

因此 $\cos\theta=\cos\angle A_nOA_{n+1}=\frac{\overline{OA_n}^2+\overline{OA_{n+1}}^2-\overline{A_nA_{n+1}}^2}{2\overline{OA_n}\cdot\overline{OA_{n+1}}}$

$$=\frac{\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}a\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}a\right)^2-(3a)^2}{2\cdot\frac{7\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}a}$$
$$=\frac{28}{35}=\frac{4}{5}$$

且 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{3}{5}$

因此 $T=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{7} & 0\\ 0 & \frac{5}{7}\end{bmatrix}$

$=\dfrac{5}{7}\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$。

◎評分原則

$\overrightarrow{OA_n}$ 變成 $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ 必須對坐標原點伸縮，其伸縮為 $\dfrac{5}{7}$ 倍，對應的伸縮矩陣為 $\begin{bmatrix}\frac{5}{7} & 0\\ 0 & \frac{5}{7}\end{bmatrix}$ (1 分)

並繞原點逆時針旋轉 $\theta=\angle A_nOA_{n+1}$，設 $\overline{A_nB_n}=7a$

則 $\overline{A_nA_{n+1}}=3a$，$\overline{OA_n}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}a$，$\overline{OA_{n+1}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}a$

因此 $\cos\theta=\cos\angle A_nOA_{n+1}=\dfrac{\overline{OA_n}^2+\overline{OA_{n+1}}^2-\overline{A_nA_{n+1}}^2}{2\overline{OA_n}\cdot\overline{OA_{n+1}}}$

$=\dfrac{\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}a\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}a\right)^2-(3a)^2}{2\cdot\frac{7\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}a}$

$=\dfrac{28}{35}=\dfrac{4}{5}$ (2 分)

且 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{3}{5}$

因此 $T=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{7} & 0\\ 0 & \frac{5}{7}\end{bmatrix}$

$=\dfrac{5}{7}\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$。 (2 分)

15. 1

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓與直線相切關係

解析：$\Gamma:(x-1)^2+(y-3)^2=2$，圓心 $M(1,3)$，半徑 $r=\sqrt{2}$

$\because L$ 與 Γ 恰交於一點，亦即相切

$\therefore d(M,L)=r\Rightarrow\dfrac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow m^2-6m+9=2m^2+2\Rightarrow m^2+6m-7=0$

$\Rightarrow(m+7)(m-1)=0$

$\Rightarrow m=1$ 或 -7 (不合)，故 $m=1$。

◎評分原則

$\Gamma:(x-1)^2+(y-3)^2=2$，圓心 $M(1,3)$，半徑 $r=\sqrt{2}$ (1 分)

$\because L$ 與 Γ 恰交於一點，亦即相切

$\therefore d(M,L)=r\Rightarrow\dfrac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$ (1 分)

$\Rightarrow m^2-6m+9=2m^2+2\Rightarrow m^2+6m-7=0$

$\Rightarrow(m+7)(m-1)=0$

$\Rightarrow m=1$ 或 -7 (不合)，故 $m=1$。 (1 分)

16. $(2,2)$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線與圓的切點

解析：將 $y=x$ 代入 Γ，得 $x^2+x^2-2x-6x+8=0$

$\Rightarrow 2x^2-8x+8=0\Rightarrow(x-2)^2=0\Rightarrow x=2$ (重根)

因此交點坐標為 $(2,2)$。

◎評分原則

將 $y=x$ 代入 Γ，得 $x^2+x^2-2x-6x+8=0$ (1 分)

$\Rightarrow 2x^2-8x+8=0\Rightarrow(x-2)^2=0\Rightarrow x=2$ (重根)

因此交點坐標為 $(2,2)$。 (1 分)

17. $\dfrac{38}{3}\pi-3\pi^2$

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

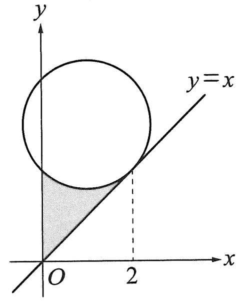
目標：旋轉體體積的計算

解析：$\Gamma:(x-1)^2+(y-3)^2=2\Rightarrow(y-3)^2=2-(x-1)^2$

$\Rightarrow y=3\pm\sqrt{2-(x-1)^2}$

其下半圓函數為 $y=3-\sqrt{2-(x-1)^2}$

所求為函數 $y=3-\sqrt{2-(x-1)^2}$ 、$y=x$、$x=0$ 所圍成的封閉區域在區間 $[0,2]$ 的旋轉體體積



所求為 $\pi\left(\int_0^2\left(3-\sqrt{2-(x-1)^2}\right)^2dx-\int_0^2x^2dx\right)$

$=\pi\left(\int_0^2\left(9-6\sqrt{2-(x-1)^2}+2-(x-1)^2\right)dx-\int_0^2x^2dx\right)$

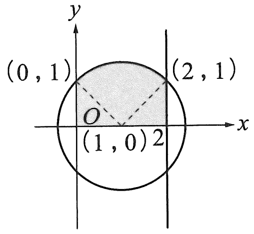
其中 $\int_0^2(11-(x-1)^2)\,dx=\left(11x-\dfrac{(x-1)^3}{3}\right)\Big|_0^2$

$=\left(22-\dfrac{1}{3}\right)-\left(0-\dfrac{-1}{3}\right)=\dfrac{64}{3}$

$\int_0^2x^2dx=\left(\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\dfrac{8}{3}$

$\int_0^2\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ 的值為 $(x-1)^2+y^2=2$ 的上半圓與 x 軸在 $[0,2]$ 所圍面積

如下圖，其灰色面積為 $2\times\dfrac{1\times1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\pi\times(\sqrt{2})^2=1+\dfrac{\pi}{2}$



故所求為

$\pi\left(\int_0^2(11-(x-1)^2)\,dx-6\int_0^2\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx-\int_0^2x^2dx\right)$

$=\pi\left(\dfrac{64}{3}-6\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{8}{3}\right)=\pi\left(\dfrac{38}{3}-3\pi\right)=\dfrac{38}{3}\pi-3\pi^2$。