台中區高中111年(110學年度)高三下
第二次分科測驗模擬考數學(數甲)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇（填）題（占76分）

一、單選題（占18分）

1. 若σ_n為數據$\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，……，$\frac{n}{n}$的標準差，則$\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma_n)^2=$？

(1)$\frac{1}{2}$　(2)$\frac{1}{3}$　(3)$\frac{1}{8}$　(4)$\frac{1}{12}$　(5)$\frac{1}{20}$。

答：(4)

解：$\sigma^2=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]-\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)\right]^2$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}-\left[\frac{n(n+1)}{2n^2}\right]^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^2=\frac{2}{6}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$$

2. 已知某地區共有甲、乙兩鎮，且自2020年起，在未來10年內均因某因素，其人口總數將會維持不變。若根據每年人口調查的紀錄發現以下規律：過去一年間，甲鎮有20%的居民會搬移至乙鎮，且乙鎮會有60%的居民仍維持住在乙鎮，未來也會有此搬移規律。由最新資料顯示，在2022年的人口調查中，此地區有60%的居民居住於甲鎮。阿竣想依上述資訊，推算2020年的人口數，試問：在2020年的人口調查時，$\frac{\text{乙鎮人口數}}{\text{此地區人口總數}}$為下列哪個選項？

(1)$\frac{1}{4}$　(2)$\frac{1}{2}$　(3)$\frac{2}{3}$　(4)$\frac{3}{4}$　(5)$\frac{4}{5}$。

答：(4)

解：$\begin{bmatrix}80\% & 40\% \\ 20\% & 60\%\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60\%\\40\%\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}80\% & 40\% \\ 20\% & 60\%\end{bmatrix}^2\right)^{-1}\begin{bmatrix}60\%\\40\%\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{18}{25} & \frac{14}{25}\\ \frac{7}{25} & \frac{11}{25}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{2}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{25} & \frac{-14}{25}\\ \frac{-7}{25} & \frac{18}{25}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{2}{5}\end{bmatrix}\times\frac{25}{4}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

3. 設多項式函數$f(x)=x^3+ax^2+bx+10$，若滿足$f(x)$為遞增函數的數對(a,b)，將其繪製於橫坐標為a軸、縱坐標為b軸的新坐標平面上，並將其區域令為S，則有關S與不等式$2a-b+9\ge 0$的解所交集的區域面積為多少平方單位？

(1)90　(2)96　(3)102　(4)168　(5)180。

答：(2)

解：$f'(x)=3x^2+2ax+b\ge 0 \Rightarrow$ 判別式 $(2a)^2-4\times 3\times b\le 0$

則 $x^2=3y$ 與 $2x-y+9=0$ 交於 $(-3,3)$、$(9,27)$

所求面積 $=\int_{-3}^{9}\left[(2x+9)-\left(\dfrac{x^2}{3}\right)\right]dx=\left[x^2+9x-\dfrac{x^3}{9}+C\right]_{-3}^{9}$

$=[72+108+(-84)]=96$

二、多選題（占 40 分）

4. 2020 年開始，新冠肺炎肆虐全球，觀察某國的確診人數發現，確診人數於某段時間接近指數成長，現在假設某國在 2020 年 3 月 x 日的確診人數近似於 $3\times 2^{\frac{x}{3}}$（單位：千人），現在考慮數列〈 a_n 〉，其中 $a_n=3\times 2^{\frac{n}{3}}$，請選出正確的選項。
   (1)〈 a_n 〉為等比數列，且其公比大於 $\sqrt[4]{3}$
   (2) a_2 相較於 a_1 成長了超過 20%
   (3)若 $b_n=\log a_n$，則 b_n 為公差小於 0.1 的等差數列
   (4)承(3)，將點 (n,b_n) 描繪於坐標平面上，所形成的圖形會落在某一直線上
   (5) $a_{30}=2a_{27}$。

答：(2)(4)(5)

解：(1)公比 $2^{\frac{1}{3}}=16^{\frac{1}{12}}<3^{\frac{1}{4}}=27^{\frac{1}{12}}$

(2) $\dfrac{a_2-a_1}{a_1}=\dfrac{a_2}{a_1}-1=2^{\frac{1}{3}}-1>20\%$（$\because 2>\left(\dfrac{6}{5}\right)^3=1.728$）

(3) $b_{n+1}-b_n=\log a_{n+1}-\log a_n=\log\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\log 2^{\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{1}{3}\log 2 \fallingdotseq \dfrac{1}{3}\times 0.3010>0.1$

(4) $(n,b_n)=(n,\log a_n)=\left(n,\log 3\times 2^{\frac{n}{3}}\right)=\left(n,\log 3+\dfrac{n}{3}\log 2\right)$

$\in y=\left(\dfrac{\log 2}{3}\right)x+\log 3$

(5) $a_{30}=3\times 2^{\frac{30}{3}}=3\times 2^{10}$，$2a_{27}=2\times 3\times 2^{\frac{27}{3}}=3\times 2^{10}$

5. 下列各函數圖形中，請選出週期為2π的選項。

(1) $f_1(x)=\cos x+|\cos x|$　(2) $f_2(x)=\sin x\cos x$

(3) $f_3(x)=\left|\frac{1}{2}+\sin x\right|$　(4) $f_4(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$

(5) $f_5(x)=\sin x\cdot(\sin x+\cos x)$。

答：(1)(3)

解：(1)週期2π（分四象限畫圖即知）

(2) $f_2(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$，週期$=2\pi\times\frac{1}{2}=\pi$

(3)週期2π（畫圖即知）

(4) $f_4(x)=\left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]^2+\left[\frac{1+\cos 2x}{2}\right]^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2x$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(1+\cos 4x)$，週期$2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$

(5) $f_5(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sin 2x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$

週期$=2\pi\times\frac{1}{2}=\pi$

6. 設$f_1(x)$、$f_2(x)$均為實係數三次多項式，$g(x)$為實係數二次多項式。已知$f_1(x)$、$f_2(x)$除以$g(x)$的商式分別為$Q_1(x)$、$Q_2(x)$，餘式分別為$r_1(x)$、$r_2(x)$，且a為非零實數，請選出正確的選項。

(1) $af_1(x)$除以$Q_1(x)$，餘式為$ar_1(x)$

(2) $f_1(x)+r_1(x)$除以$ag(x)$的餘式為$2r_1(x)$

(3)若$xf_2(x)$除以$g(x)$的餘式為$xr_2(x)$，則$r_2(x)$為常數多項式

(4) $Q_2(x)f_1(x)-Q_1(x)f_2(x)$可能為三次多項式

(5)若$f_2(x)$有一次因式$x-a$，則$r_2(a)=0$。

答：(2)(3)

解：$f_1(x)=g(x)Q_1(x)+r_1(x)$、$f_2(x)=g(x)Q_2(x)+r_2(x)$

(1) $af_1(x)=Q_1(x)[ag(x)]+ar_1(x)$，須$\deg ar_1(x)<\deg Q_1(x)$，餘式方為$ar_1(x)$

(4) $Q_2(x)f_1(x)-Q_1(x)f_2(x)=Q_2(x)r_1(x)-Q_1(x)r_2(x)$

但$\deg Q_1(x)=\deg Q_2(x)=1$，且$\deg r_1(x)$、$\deg r_2(x)=1$或0或不存在

$\deg\left[Q_2(x)f_1(x)-Q_1(x)f_2(x)\right]=\deg\left[Q_2(x)r_1(x)-Q_1(x)r_2(x)\right]\neq 3$

(5) $f_2(x)$有一次因式$x-a$，則$f_2(a)=g(a)Q_2(a)+r_2(a)=0$

但不能確定$r_2(a)=0$

7. 已知$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$為空間中三個不平行的非零向量，則下列何者正確？

(1) $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|^2+(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2=|\overrightarrow{a}|^2\cdot|\overrightarrow{b}|^2$

(2)對任意實數m、n，$(m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=0$

(3)若已知$|\overrightarrow{a}|$和$|\overrightarrow{b}|$，則當$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$越小時，$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$越大

(4) $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c}$

(5) $\overrightarrow{c}$在$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$上的正射影長為$\dfrac{|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|}{|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|}$。

答：(1)(2)(5)

解：(1)$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|^2+(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2=|\overrightarrow{a}|^2\cdot|\overrightarrow{b}|^2\sin^2\theta+|\overrightarrow{a}|^2\cdot|\overrightarrow{b}|^2\cos^2\theta=|\overrightarrow{a}|^2\cdot|\overrightarrow{b}|^2$

(2)由線性組合概念對任意實數m、n，$(m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b})\perp(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$

(3)承(1)應為$(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2$愈小，$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|^2$愈大

(4)無此規則

(5)正確

8. 投擲一個正六體骰子，每面朝上的機會均等。
已知這六面的數字分別為1、1、2、3、5、8，設擲此骰子三次，
其朝上的數字分別為X、Y、Z，請選出正確的選項。

(1)滿足$X<Y<Z$的機率為$\dfrac{C_3^5}{6^3}$

(2)在$X<Y<Z$的條件下，滿足X、Y、Z均為奇數的機率為$\dfrac{1}{8}$

(3)滿足$X+Y+Z$為偶數的機率大於$\dfrac{1}{2}$

(4)滿足$X=Y$的機率為$\dfrac{5}{6}$

(5)在$X+Y+Z$為偶數的條件下，滿足$X=Y$的機率為$\dfrac{2}{13}$。

答：(2)(5)

解：(1)滿足$X<Y<Z$的機率為$\underbrace{\dfrac{C_3^4}{6^3}}_{\text{無}1}+\underbrace{\dfrac{C_1^2C_2^4}{6^3}}_{\text{有}1}=\dfrac{4+12}{216}=\dfrac{2}{27}$

(2)在$X<Y<Z$的條件下，滿足X、Y、Z均為奇數的條件機率$=\dfrac{\dfrac{C_1^2C_2^2}{6^3}}{\dfrac{2}{27}}=\dfrac{1}{8}$

(3)滿足 $X+Y+Z$ 為偶數的機率為 $\underbrace{\left(\dfrac{2}{6}\right)^3}_{\text{三偶}}+\underbrace{C_1^3\left(\dfrac{2}{6}\right)\left(\dfrac{4}{6}\right)^2}_{\text{一偶二奇}}=\dfrac{13}{27}<\dfrac{1}{2}$

(4)滿足 $X=Y$ 的機率為 $\underbrace{\left(\dfrac{2}{6}\right)^2}_{X=Y=1}+\underbrace{4\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2}_{X=Y=\text{非}1}=\dfrac{2}{9}$

(5)在 $X+Y+Z$ 為偶數的條件下，滿足 $X=Y$ 的條件機率

為 $=\dfrac{\underbrace{2\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\times\dfrac{2}{6}}_{\text{三偶（22偶+88偶）}}+\underbrace{\left(\dfrac{2}{6}\right)^2\times\dfrac{2}{6}}_{\text{一偶二奇（11偶）}}+\underbrace{2\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\times\dfrac{2}{6}}_{\text{一偶二奇（33偶+55偶）}}}{\dfrac{13}{27}}=\dfrac{\dfrac{2}{27}}{\dfrac{13}{27}}=\dfrac{2}{13}$

三、選填題（占 18 分）

9. 已知平面上三點 $A(2,3)$、$B(4,1)$、$P\left(\cos^2\theta,\sin\theta\cos\theta\right)$，$0\le\theta\le 2\pi$， 則 ΔABP 面積的最小值為________。（化為最簡根式）

答：$\dfrac{9-\sqrt{2}}{2}$

解：ΔABP 面積 $=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}2 & -2\\ \cos^2\theta-2 & \sin\theta\cos\theta-3\end{vmatrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\left|2\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta-10\right|$

$=\dfrac{1}{2}\left|\sin 2\theta+1+\cos 2\theta-10\right|\le\dfrac{1}{2}\left|\sqrt{2}-9\right|=\dfrac{9-\sqrt{2}}{2}$

10. 已知空間中兩點 $A(1,2,3)$、$B(2,1,-1)$，且有一動點 $P(t,2t+1,2t)$，t 為實數。 若 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值時，此時 $t=$________。（化為最簡根式）

答：$\dfrac{5-\sqrt{10}}{3}$

解：$\overline{PA}+\overline{PB}=\sqrt{(t-1)^2+(2t-1)^2+(2t-3)^2}+\sqrt{(t-2)^2+(2t)^2+(2t+1)^2}$

$=\sqrt{9t^2-18t+11}+\sqrt{9t^2+5}$

$=3\left[\sqrt{(t-1)^2+\left(0-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}+\sqrt{(t-0)^2+\left(0+\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}\right]$

當 $\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$、$(t,0)$、$\left(0,-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$ 共線，

亦即 $\dfrac{-\dfrac{\sqrt{2}}{3}}{t-1}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{5}}{3}}{1-0}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{5-\sqrt{10}}{3}$ 時，$\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值

11. 在某夜市攤位舉辦了一場「紅包大放送」活動，每位顧客均可參與此活動一次。
每位顧客參與活動時，均可擲一枚不均勻銅板兩次，每次投擲互不影響，
已知此枚不均勻銅板出現正面的機率為 $\dfrac{2}{5}$ ，並有下述規則：
(1)若出現兩個反面可得獎金 200 元，並停止投擲；
(2)若出現一正一反可得獎金 300 元，並停止投擲；
(3)若出現兩個正面可得獎金 500 元，並且獲得擲一次兩顆公正骰子的機會，若擲得點數和為質數，可再得獎金 250 元並停止投擲；若擲得點數和為合數，可再得獎金 100 元並停止投擲。
依上述規則，試問：每位參加活動的顧客可獲得獎金的期望值為________元。

答：322

解：

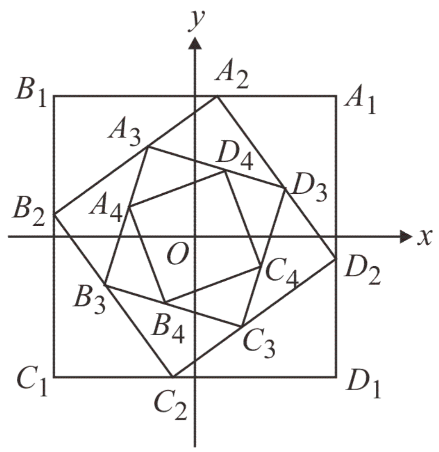
A	反反	反正	正正＋質	正正＋合
P	$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times 2!=\frac{12}{25}$	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{15}{36}=\frac{5}{75}$	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{21}{36}=\frac{7}{75}$
\$	200	300	$500+250$	$500+100$

$$E(X)=200\times\frac{9}{25}+300\times\frac{12}{25}+750\times\frac{5}{75}+600\times\frac{7}{75}=322$$

第貳部分：混合題或非選擇題（占 24 分）

12-14 題為題組

如圖（示意圖），$A_nB_nC_nD_n$ 均為正方形，n 為正整數，其中 A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}、D_{n+1} 分別在 $\overline{A_nB_n}$、$\overline{B_nC_n}$、$\overline{C_nD_n}$、$\overline{D_nA_n}$ 上，且滿足 $\overline{A_nA_{n+1}}:\overline{A_{n+1}B_n}=\overline{B_nB_{n+1}}:\overline{B_{n+1}C_n}=\overline{C_nC_{n+1}}:\overline{C_{n+1}D_n}=\overline{D_nD_{n+1}}:\overline{D_{n+1}A_n}=3:4$。若將這些正方形置於坐標平面上，且 $\overline{A_1B_1}//\overline{C_1D_1}//x$ 軸，$\overline{B_1C_1}//\overline{A_1D_1}//y$ 軸，且所有正方形中心均為坐標原點，試回答下列問題：



12. 若 $\overline{OA_2}=r\,\overline{OA_1}$ ，則實數 $r=$________。（化為最簡分數）

答：$\dfrac{5}{7}$

解：令 $A_1(7,7)$、$B_1(-7,7)$、$A_2(1,7)$，$B_2(-7,1)$、$A_3\left(\dfrac{-17}{7},\dfrac{31}{7}\right)$

故 $r=\dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}}=\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{98}}=\dfrac{5}{7}$

13.若 $\overline{A_1B_1}=4\sqrt{3}$，試求所有(無窮)正方形的面積總和。

答：

解：$\dfrac{\left(4\sqrt{3}\right)^2}{1-\left(\dfrac{5}{7}\right)^2}=\dfrac{49\times 48}{49-25}=98$

14.已知 O 為坐標原點，設 $\overrightarrow{OA_n}=\left(x_n\ ,y_n\right)$，$n$ 為正整數。

若有一平面線性變換 T 滿足 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$，試求 T。

答：$\begin{bmatrix} \dfrac{4}{7} & \dfrac{-3}{7} \\ \dfrac{3}{7} & \dfrac{4}{7} \end{bmatrix}$

解：$T\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-17}{7} \\ 7 & \dfrac{31}{7} \end{bmatrix}\Rightarrow T=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-17}{7} \\ 7 & \dfrac{31}{7} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}\times\dfrac{1}{42}=\begin{bmatrix} \dfrac{4}{7} & \dfrac{-3}{7} \\ \dfrac{3}{7} & \dfrac{4}{7} \end{bmatrix}$

<u>15-17 題為題組</u>

坐標平面上有一圓方程式 $\Gamma: x^2+y^2-2x-6y+8=0$，以及一直線 $L: y=mx$，$m>0$。試回答下列問題：

15.若直線 L 與圓 Γ 兩圖形恰交於一點，試求 m 值。

答：1

解：$\Gamma:\left(x-1\right)^2+\left(y-3\right)^2=2$、$L: mx-y=0$

相切：$\dfrac{\left|m-3\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}\Rightarrow m=-7$、1（取正，$m>0$）

16.承 15.，試求直線 L 與圓 Γ 的交點坐標。

答：$\left(2,2\right)$

解：$\Gamma:\left(x-1\right)^2+\left(y-3\right)^2=2$、$L: x-y=0$

相交：$2x^2-8x+8=0\Rightarrow x=y=2$

17.承 15.，若直線 L、圓 Γ 外部與 y 軸所圍成的封閉區域為 R，試求將 R 繞 x 軸旋轉一圈的旋轉體體積。

答：$\dfrac{38\pi}{3}-3\pi^2$

$\boxed{解}$：$\int_0^2 \pi\left(3-\sqrt{2-(x-1)^2}\right)^2-\frac{1}{3}\times\pi\times 2^2\times 2$

$=\int_0^2 \pi\left(10+2x-x^2-6\sqrt{2-(x-1)^2}\right)-\frac{8\pi}{3}$

$=\pi\left(10x+x^2-\frac{1}{3}x^3+C\right)\Big|_0^2-6\pi\left(\frac{1}{4}\times 2\pi+1\right)-\frac{8\pi}{3}$

$=\pi\left(20+4-\frac{8}{3}\right)-3\pi^2-6\pi-\frac{8\pi}{3}$

$=\frac{38\pi}{3}-3\pi^2$