數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(3)	(4)	(5)	(1)(2)	(1)(2)(4)(5)	(2)(3)(5)	(1)(4)
8.						
(1)(3)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：有系統的計數

解析：已知男生和女生穿著的顏色不同，

女生穿同一種顏色，而男生穿剩下兩種顏色：

有 $C_1^3C_2^2\,(2^6-2)=3\times62=186$ 種可能

故選(3)。

2. (4)

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：理解三次函數與一階導函數、二階導函數之間的關係

解析：確認以下條件：

①$f(x)$ 的首項係數為正，

一階導函數 $f'(x)$ 必是開口向上的二次函數，

二階導函數 $f''(x)$ 必是斜率為正的直線，

因此刪掉(3)(5)

②方程式 $f''(x)=0$ 的解必是三次函數 $f(x)$ 反曲點的 x 坐標，

因此刪掉(2)

③方程式 $f'(x)=0$ 的解必是 $f(x)$ 極值的發生處，

因此刪掉(1)

故選(4)。

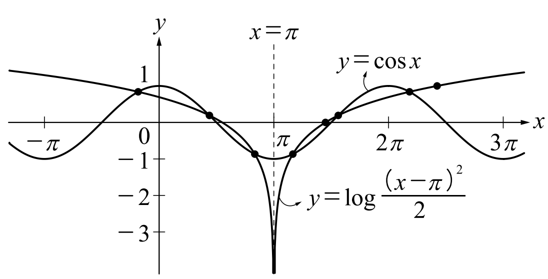
3. (5)

出處：第三冊〈三角函數〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：三角函數與對數函數圖形的對稱性

解析：$\begin{cases} y=\cos x \\ y=\log\dfrac{(x-\pi)^2}{2}=2\log|x-\pi|-\log 2 \end{cases}$

將兩函數圖形畫出來後發現兩個函數的圖形都是對稱於鉛直線 $x=\pi$，其中 $y=2\log(x-\pi)-\log 2$ 遞增且通過 $(\pi+\sqrt{2}\,,0)$ 及 $(\pi+2\sqrt{5}\,,1)$



故直線 $x=\pi$ 的左右各有三個交點，兩兩對稱於 $x=\pi$

$\therefore$ 六個交點的 x 坐標之和為 $3\times(2\times\pi)=6\pi$

故選(5)。

二、多選題

4. (1)(2)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：分點公式與線性組合的概念

解析：(1)(2) ○：由內分點公式知，C、D 均在 $\overline{AB}$ 上且

$\begin{cases} \overline{AC}:\overline{BC}=1:1 \\ \overline{AD}:\overline{BD}=2:3 \end{cases}$

$\therefore D$ 在 $\overline{AC}$ 上

(3) ╳：$\because \overrightarrow{OE}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

其係數和 $=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\neq1$

$\therefore E$ 不在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上，故 C、D、E 三點不共線

(4) ╳：$\begin{cases} \overline{AC}=\dfrac{1}{2}\overline{AB} \\ \overline{AD}=\dfrac{2}{5}\overline{AB} \end{cases}$ $\therefore \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{5}=0.8$

(5) ╳：$\because \overrightarrow{OE}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ 的係數和 $\neq1$

$\therefore E$ 不在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上 $\Rightarrow \overrightarrow{BE}\nparallel\overrightarrow{BA}$

$\therefore \overrightarrow{BE}$ 不可寫成 $\overrightarrow{BA}$ 的係數積

故選(1)(2)。

5. (1)(2)(4)(5)

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：極限的概念理解

解析：(1) ○：$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{|x^2-x|}=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{|x|}\cdot\frac{f(x)}{|x-1|}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{1}{|x|}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{|x-1|}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{|x-1|}$ 存在

(2) ○：$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(f(x))^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)}{|x-1|}\cdot\frac{f(x)}{|x-1|}\right)$

$\displaystyle=\left(\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{|x-1|}\right)^2$ 存在

(3) ╳：$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}$ 可能不存在，例如 $f(x)=|x-1|$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{|x-1|}=1$，但 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{1}{|x-1|}$ 不存在

(4) ○：$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{|x-1|}=\lim_{x\to1}(x-1)\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{|x-1|}=0$

(5) ○：由 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{|x-1|}$ 存在，

可得 $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)}{|x-1|}\cdot|x-1|\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{|x-1|}\lim_{x\to1}|x-1|=0$

$\displaystyle\lim_{x\to1}(f(x)-\pi)=-\pi$

可得 $\displaystyle\lim_{x\to1}[f(x)-\pi]=-4$

故選(1)(2)(4)(5)。

6. (2)(3)(5)

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉、選修數學甲(上)〈微分〉

目標：多項式函數與絕對值函數的性質討論

解析：(1) ╳：$f(a)=|a-1|+|a-2|+|a-3|$

當 $a=2$ 時，$f(a)$ 有最小值 2

⑵ ○：$g(a)=(a-1)^2+(a-3)^2+(a-5)^2$

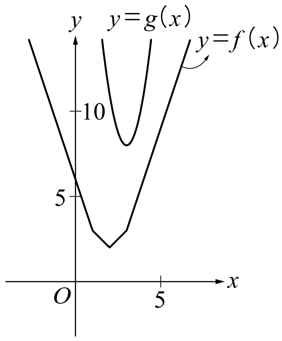
當 $a=\dfrac{1+3+5}{3}=3$ 時，$g(a)$ 有最小值 8

⑶ ○：若 $f(a)=f(4)$，由 $f(a)$ 的對稱性可得 $a=0$ 或 4

因此 $g(a)$ 可能為 $g(0)$ 或 $g(4)$，

最大值為 $g(0)=35$

⑷ ╳：$f(x)$ 及 $g(x)$ 的圖形如下：



因此不存在 a 使 $f(a)=g(a)$

⑸ ○：當 $a>3$ 時，$f'(a)=3$

當 $2<a<3$ 時，$f'(a)=1$

當 $1<a<2$ 時，$f'(a)=-1$

當 $a<1$ 時，$f'(a)=-3$

又 $g'(a)=2(a-1)+2(a-3)+2(a-5)=6(a-3)$

當 $g'(a)=3$ 時，$a=3+\dfrac{1}{2}$

當 $g'(a)=1$ 時，$a=3+\dfrac{1}{6}$

當 $g'(a)=-1$ 時，$a=3-\dfrac{1}{6}$

當 $g'(a)=-3$ 時，$a=3-\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 恰 1 個 a 使 $f'(a)=g'(a)$

〈另解〉

作 $y=3x-6$ 的平行線，

發現當 $x>3$ 時，$y=g(x)$ 有一條斜率為 3 的切線

故選⑵⑶⑸。

7. ⑴⑷

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈機率〉

目標：結合集合概念及條件機率的乘法公式

解析：⑴ ○：有打過 A 疫苗的比例為

$0.6\times0.8+0.4\times0.7=0.76>75\ \%$

⑵ ╳：填表單的男性中，有打過 A 疫苗但沒打過 C 疫苗的比例為 $80\ \%-60\ \%=20\ \%$

填表單的女性中，有打過 A 疫苗但沒打過 C 疫苗的比例為 $70\ \%-30\ \%=40\ \%$

因此有打過 A 疫苗但沒打過 C 疫苗的比例為

$0.6\times0.2+0.4\times0.4=0.28=28\ \%$

⑶ ╳：填表單的男性中，

打過 B 疫苗的比例為 0.7，沒打過 C 疫苗的比例為 0.4

$\therefore 0.7+0.4-1\leq$ 有打過 B 疫苗但沒打過 C 疫苗的比例 ≤ 0.4

即 $0.1\leq$ 有打過 B 疫苗但沒打過 C 疫苗的比例 ≤ 0.4

因此隨機抽一人，$0.6\times0.1\leq$ 有打過 B 疫苗但沒打過 C 疫苗且是男性的例 $\leq 0.6\times0.4$

可得 $0.06\leq$ 有打過 B 疫苗但沒打過 C 疫苗且是男性的比例 ≤ 0.24

⑷ ○：承⑶，填表單的女性中，

打過 B 疫苗的比例為 0.5，沒打過 C 疫苗的比例為 0.7

$\therefore 0.5+0.7-1\leq$ 有打過 B 疫苗但沒打過 C 疫苗的比例 ≤ 0.5

即 $0.2\leq$ 有打過 B 疫苗但沒打過 C 疫苗的比例 ≤ 0.5

因此隨機抽一人，有打過 B 疫苗但沒打過 C 疫苗的比例 $\leq 0.6\times0.4+0.4\times0.5=0.44$

⑸ ╳：填表單的男性中，完全沒打過疫苗的比例 ≤ 0.2

($\because$ 打過 A 疫苗的比例最多，為 0.8)

填表單的女性中，完全沒打過疫苗的比例 ≤ 0.3

($\because$ 打過 A 疫苗的比例最多，為 0.7)

因此完全沒打過疫苗的比例

$\leq 0.6\times0.2+0.4\times0.3=0.24$

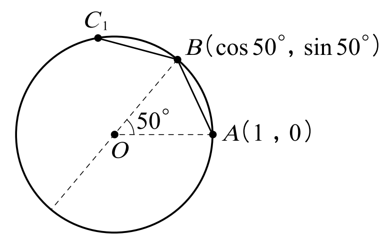
故選⑴⑷。

8. ⑴⑶

出處：第二冊〈三角比〉、第四冊〈矩陣〉

目標：結合廣義三角比及鏡射矩陣、旋轉矩陣變換

解析：⑴ ○：A 點沿直線 OB 鏡射一次後，可得到 C_1，又直線 OB 的斜率為 $\tan 50^\circ$

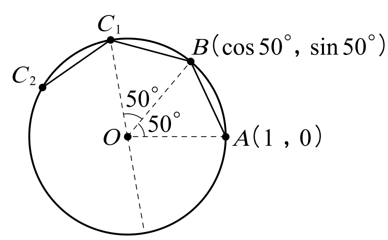


$\therefore$ 鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}\cos(2\times50^\circ) & \sin(2\times50^\circ)\\ \sin(2\times50^\circ) & -\cos(2\times50^\circ)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos100^\circ & \sin100^\circ\\ \sin100^\circ & -\cos100^\circ\end{bmatrix}$

因此 $\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos100^\circ & \sin100^\circ\\ \sin100^\circ & -\cos100^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

⑵ ╳：A 點反彈到 C_1 後，B 點沿直線 OC_1 鏡射一次後，可得到 C_2，又直線 OC_1 的斜率為 $\tan 100^\circ$

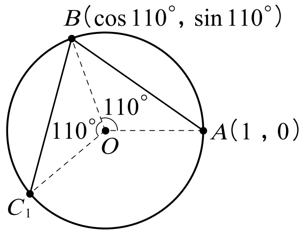


$\therefore$ 鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}\cos(2\times100^\circ) & \sin(2\times100^\circ)\\ \sin(2\times100^\circ) & -\cos(2\times100^\circ)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos200^\circ & \sin200^\circ\\ \sin200^\circ & -\cos200^\circ\end{bmatrix}$

因此$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 200^\circ & \sin 200^\circ \\ \sin 200^\circ & -\cos 200^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 50^\circ \\ \sin 50^\circ \end{bmatrix}$

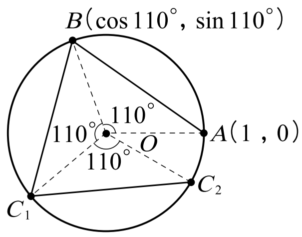
(3) ○：A 點以 O 為中心，逆時針旋轉 220°，可得到 C_1



又旋轉矩陣為$\begin{bmatrix} \cos 220^\circ & -\sin 220^\circ \\ \sin 220^\circ & \cos 220^\circ \end{bmatrix}$，

因此$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 220^\circ & -\sin 220^\circ \\ \sin 220^\circ & \cos 220^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(4) ╳：A 點反彈到 C_1 後，再以 O 為中心，逆時針旋轉 110°，可得到 C_2



因此$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 110^\circ & -\sin 110^\circ \\ \sin 110^\circ & \cos 110^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix} \cos 110^\circ & -\sin 110^\circ \\ \sin 110^\circ & \cos 110^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 220^\circ & -\sin 220^\circ \\ \sin 220^\circ & \cos 220^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} \cos 330^\circ & -\sin 330^\circ \\ \sin 330^\circ & \cos 330^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

由此規律可得$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix} \cos(110^\circ(n+1)) & -\sin(110^\circ(n+1)) \\ \sin(110^\circ(n+1)) & \cos(110^\circ(n+1)) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(5) ╳：承(4)討論，$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix} \cos(130^\circ(n+1)) & -\sin(130^\circ(n+1)) \\ \sin(130^\circ(n+1)) & \cos(130^\circ(n+1)) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，

當 $n=35$ 時，$130^\circ(n+1)=130^\circ\times 36$，

$\therefore \begin{bmatrix} \cos(130^\circ(n+1)) & -\sin(130^\circ(n+1)) \\ \sin(130^\circ(n+1)) & \cos(130^\circ(n+1)) \end{bmatrix}=I$

得$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

故選(1)(3)。

三、選填題

9. 0.515

出處：第四冊〈機率〉

目標：獨立事件的應用

解析：每個項目有 2 點，獲勝全拿，平手平分點數

$\therefore$至少再得 4 點以上才能獲得獎盃

4 點的情形有 2 勝 1 敗、1 勝 2 平手

5 點的情形有 2 勝 1 平手

6 點的情形有 3 勝

又南校的獲勝機率均為 0.5，平手機率均為 0.1，可知打輸的機率均為 0.4

故獲得獎盃的機率為〔$C^3_2(0.5)^2\cdot 0.4+C^3_1 0.5\cdot(0.1)^2$〕

$+C^3_2(0.5)^2\cdot 0.1+C^3_3(0.5)^3$

$=0.515$。

10. 4

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

目標：利用微積分基本定理求多項式函數

解析：可知 $f(0)=\int_0^0 f(t)dt+7=7$，故 $f(x)$ 的常數項為 7

由微積分基本定理

$f'(x)=(\int_0^x f(t)dt)'+(x^4-5x^3+4x^2-9x+7)'$

$=f(x)+4x^3-15x^2+8x-9$

$\Rightarrow f(x)=f'(x)-4x^3+15x^2-8x+9$ ………(*)

$\because f'(x)$ 的次數是 $f(x)$ 的次數少 1

$\therefore f(x)$ 為 3 次式且首項係數為 -4

令 $f(x)=-4x^3+ax^2+bx+7$

$f'(x)=-12x^2+2ax+b$

代入(*)式得 $-4x^3+ax^2+bx+7$

$=-12x^2+2ax+b-4x^3+15x^2-8x+9$

即 $ax^2+bx+7=3x^2+(2a-8)x+b+9$

$\therefore \begin{cases} a=3 \\ b=2a-8 \\ 7=b+9 \end{cases}$，得 $a=3$，$b=-2$

$\Rightarrow f(x)=-4x^3+3x^2-2x+7$

故 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 $f(1)=4$。

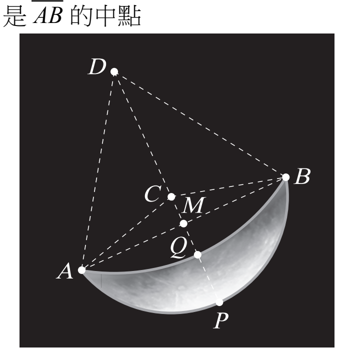
11. $\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}-\dfrac{1}{6}$

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

目標：利用三角函數的概念解決情境問題

解析：設圖中滿月圓與地球影錐截圓的圓心分別為 C、D，半徑分別為 1、r

且 M 是 $\overline{AB}$ 的中點



若 $\angle ACP=\theta$ $\quad\therefore \sin\theta=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{AB}}{1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$\overline{CM}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\overline{MQ}=1-\overline{CM}-\overline{PQ}$

$=1-\dfrac{1}{2}-(2-\sqrt{3})=-\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$

直角三角形 ADM 中，由 $\overline{AD}^2=\overline{AM}^2+\overline{DM}^2$

$\Rightarrow r^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(r-\overline{MQ})^2$

$\Rightarrow r^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left[r-\left(-\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2\Rightarrow r=\sqrt{3}$

$\therefore \angle ADP=\dfrac{\pi}{6}$

且弓形 ABQ 面積為

$\dfrac{1}{2}\cdot r^2\cdot\dfrac{2\pi}{6}-\dfrac{1}{2}\cdot r^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

弓形 ABP 面積為

$\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

∴月偏食亮面的面積

＝弓形 ABP 的面積－弓形 ABQ 的面積

$=\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$

所以月偏食亮面的面積是滿月圓的

$\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}}{\pi}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}-\dfrac{1}{6}$ 倍。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. (1)(2)(3)

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間向量的垂直判斷

解析：(1)(2) ○：∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$

且等腰三角形底邊的中線是中垂線

$\therefore \overline{AM}\perp\overline{BC}$

又兩平面 ABC、BCD 互相垂直

可得 $\overline{AM}\perp$平面 BCD

故 $\overline{AM}\perp$平面 BCD 上的任一直線

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$

(3) ○：由於△MCD 為邊長 1 的正三角形且 M 是 $\overline{BC}$ 的中點

$\therefore \overline{MB}=\overline{MC}=\overline{MD}=\overline{CD}=1$

故$\angle MBD=\angle MDB$ 且$\angle CMD=\angle MBD+\angle MDB$

$\Rightarrow\angle MBD=\angle MDB=30^\circ\Rightarrow\angle BDC=90^\circ$

$\therefore \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

(4) ╳：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

由(3)知，$\overline{BD}\perp\overline{CD}$，由內積的定義

得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=-\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|^2<0$

(5) ╳：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$

由(3)知，$\overline{BD}\perp\overline{CD}$，由內積的定義

得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|^2>0$

故選(1)(2)(3)。

13. $\left(0\,,\,\dfrac{1}{3}\,,\,\dfrac{2h}{3}\right)$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間坐標系及分點公式的應用

解析：∵ $\overline{AM}\perp$平面 BCD

∴取 $\overline{AM}$ 為 z 軸正向且 $A(0\,,0\,,h)$

$\overline{AN}:\overline{NC}=1:2$

由內分點公式得 $N\left(0\,,\,\dfrac{1}{3}\,,\,\dfrac{2h}{3}\right)$。

◎評分原則

∵ $\overline{AM}\perp$平面 BCD

∴取 $\overline{AM}$ 為 z 軸正向且 $A(0\,,0\,,h)$　(1 分)

$\overline{AN}:\overline{NC}=1:2$

由內分點公式得 $N\left(0\,,\,\dfrac{1}{3}\,,\,\dfrac{2h}{3}\right)$。　(1 分)

14. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：利用外積求兩平面的夾角、四面體體積

解析：空間直角坐標系如題圖所示，

取 $B(0\,,-1\,,0)$、$D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\dfrac{1}{2}\,,\,0\right)$

$\therefore\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\dfrac{3}{2}\,,\,0\right)$ 且 $\overrightarrow{BN}=\left(0\,,\,\dfrac{4}{3}\,,\,\dfrac{2h}{3}\right)$

平面 BDN 的法向量為

$\overrightarrow{m}=\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BN}$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\dfrac{3}{2}\,,\,0\right)\times\left(0\,,\,\dfrac{4}{3}\,,\,\dfrac{2h}{3}\right)$

$=\left(h\,,\,-\dfrac{\sqrt{3}h}{3}\,,\,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

又平面 BCD 的法向量為 $\overrightarrow{n}=(0\,,0\,,1)$

∵兩面角 N-BD-C 的大小為 $\dfrac{\pi}{4}$

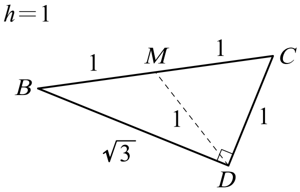
$\therefore\overrightarrow{m}$ 與 $\overrightarrow{n}$ 的夾角 θ 為 $\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$

$$\cos\theta=\dfrac{0+0+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{1\cdot\sqrt{h^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}h\right)^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}}$$

$$=\dfrac{0+0+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{1\cdot\sqrt{\dfrac{4}{3}(h^2+1)}}$$

$$=\dfrac{1}{\sqrt{h^2+1}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$$

∴正數 $h=1$



故四面體 $A\text{-}BCD$ 的體積為

$\frac{1}{3}$(直角三角形 BCD 面積)$\cdot h$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1\times\sqrt{3}}{6}\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{6}$。

◎評分原則

空間直角坐標系如題圖所示，

取 $B(0,-1,0)$、$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$

$\therefore \overrightarrow{BD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$ 且 $\overrightarrow{BN}=\left(0,\frac{4}{3},\frac{2h}{3}\right)$ (1 分)

平面 BDN 的法向量為

$$\overrightarrow{m}=\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BN}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)\times\left(0,\frac{4}{3},\frac{2h}{3}\right)$$
$$=\left(h,-\frac{\sqrt{3}h}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\quad(1\text{ 分})$$

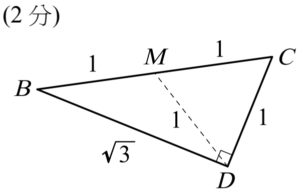
又平面 BCD 的法向量為 $\overrightarrow{n}=(0,0,1)$

$\because$兩面角 $N\text{-}BD\text{-}C$ 的大小為 $\frac{\pi}{4}$

$\therefore \overrightarrow{m}$ 與 $\overrightarrow{n}$ 的夾角 θ 為 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

$$\cos\theta=\frac{0+0+\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1\cdot\sqrt{h^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}h\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}}$$
$$=\frac{0+0+\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1\cdot\sqrt{\frac{4}{3}(h^2+1)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{h^2+1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$正數 $h=1$ (2 分)



故四面體 $A\text{-}BCD$ 的體積為

$\frac{1}{3}$(直角三角形 BCD 面積)$\cdot h$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1\times\sqrt{3}}{6}\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{6}$。 (1 分)

15. $a>0$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：二次函數的極值

解析：$\because f(x)=ax^2+8x+5$ 為二次函數，又有極小值

$\therefore f(x)=ax^2+8x+5$ 開口向上，故 $a>0$。

◎評分原則

$\because f(x)=ax^2+8x+5$ 為二次函數，又有極小值

$\therefore f(x)=ax^2+8x+5$ 開口向上，故 $a>0$。 (有寫出「正」即給 2 分)

16. $k=0$

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：求三次函數的極值

解析：$g'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$g'(x)=0$ 的兩根為 0 及 $-\frac{2a}{3}$

$\because a>0$

$\therefore -\frac{2a}{3}<0$

列出表格：

x	……	$-\frac{2a}{3}$	……	0	……
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗		↘		↗

因此 $g(x)$ 在 $x=0$ 時有極小值

即 $k=0$。

◎評分原則

$g'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$g'(x)=0$ 的兩根為 0 及 $-\frac{2a}{3}$ (1 分)

$\because a>0$

$\therefore -\frac{2a}{3}<0$

列出表格：

x	……	$-\frac{2a}{3}$	……	0	……
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗		↘		↗

(1 分)

因此 $g(x)$ 在 $x=0$ 時有極小值

即 $k=0$。 (1 分)

17. $a=4$，$g(x)$ 的極大值為 $\frac{283}{27}$

出處：第一冊〈多項式函數〉、選修數學甲(上)〈微分〉

目標：結合二次函數的配方法及三次函數的極值

解析：$f(x)=ax^2+8x+5=a\left(x^2+\frac{8}{a}x\right)+5$

$$=a\left(x+\frac{4}{a}\right)^2+5-\frac{16}{a}$$

得 $f(x)$ 的極小值為 $5-\frac{16}{a}$

又 $g(x)$ 的極小值為 $g(0)=1$

$\Rightarrow 5-\frac{16}{a}=1$，$a=4$

因此 $g(x)=x^3+4x^2+1$

又由 16. 可知 $g(x)$ 在 $x=-\frac{2a}{3}=-\frac{8}{3}$ 時，有極大值

$g\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{512}{27}+4\times\frac{64}{9}+1=\frac{283}{27}$。

◎評分原則

$f(x)=ax^2+8x+5=a\left(x^2+\frac{8}{a}x\right)+5$

$$=a\left(x+\frac{4}{a}\right)^2+5-\frac{16}{a}$$

得 $f(x)$ 的極小值為 $5-\frac{16}{a}$ (1 分)

又 $g(x)$ 的極小值為 $g(0)=1$

$\Rightarrow 5-\dfrac{16}{a}=1$，$a=4$　(1 分)

因此 $g(x)=x^3+4x^2+1$

又由 16. 可知 $g(x)$ 在 $x=-\dfrac{2a}{3}=-\dfrac{8}{3}$ 時，有極大值

$g\left(-\dfrac{8}{3}\right)=-\dfrac{512}{27}+4\times\dfrac{64}{9}+1=\dfrac{283}{27}$。　(2 分)

18. 6

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：利用函數的遞增性求極值

解析：$h(x)=g(f(x))=g(4x^2+8x+5)$

又 $4x^2+8x+5\geq 1$

由 16. 可知 $g(x)$ 在 $x\geq 0$ 時遞增

因此 $h(x)$ 的最小值為 $g(1)=1+4+1=6$。

◎評分原則

$h(x)=g(f(x))=g(4x^2+8x+5)$

又 $4x^2+8x+5\geq 1$　(1 分)

由 16. 可知 $g(x)$ 在 $x\geq 0$ 時遞增　(1 分)

因此 $h(x)$ 的最小值為 $g(1)=1+4+1=6$。　(1 分)