

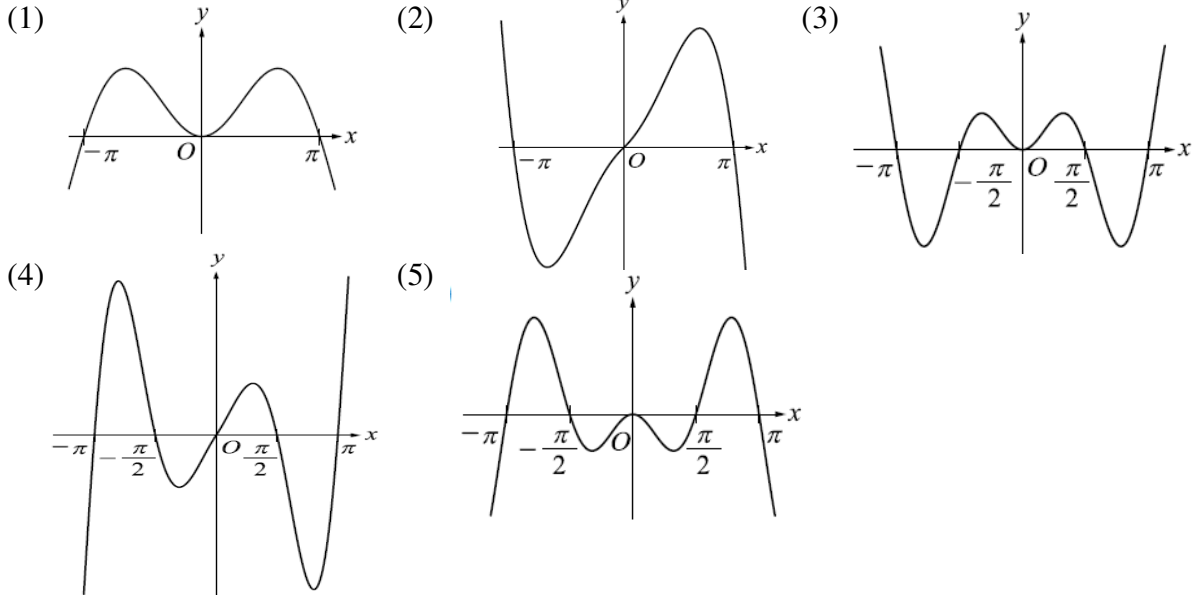
111 學年度全國高級中學分科測驗數學甲 A 卷(111-E5)



第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 下列選項中哪個圖形可能是函數 $f(x) = 2^{|x|} \sin 2x$ 的部分圖形？



2. 四面體 $OABC$ 中，已知 $\cos \angle AOB = \frac{3}{5}$ ， $\cos \angle AOC = \frac{1}{3}$ ，且平面 OAB 與平面 OAC 互相垂直，則 $\sin \angle BOC$ 的值為下列哪一個選項？

- (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (3) $\frac{4}{5}$ (4) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (5) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

3. 已知函數 $f(x) = 2x^3 + 3(a+3)x^2 + 12(a+1)x - 6$ 在區間 $(0,1)$ 上有極值，則實數 a 的範圍為下列哪一個選項？

- (1) $-2 < a < -1$ (2) $-1 < a < 0$ (3) $0 < a < 1$
 (4) $1 < a < 2$ (5) $2 < a < 3$

二、多選題(占 40 分)

4. 在以 O 為原點的坐標平面上，有 $P(3\cos \theta, 3\sin \theta)$ 、 $Q(3\cos \theta + \cos 7\theta, 3\sin \theta + \sin 7\theta)$ 兩點，其中 $\frac{\pi}{9} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{18}$ ，請選出正確的選項。

- (1) $\overline{PQ} = \sqrt{7}$ (2) \overline{OQ} 的最小值為 2
 (3) \overline{OQ} 的最大值為 13 (4) 若 $\angle OPQ$ 為直角，則 $\overline{OQ} = \sqrt{10}$ (5) 若 $\angle OPQ$ 為直角，則 $\theta = \frac{\pi}{4}$

5. 有 9 顆相同的球，每顆球上面分別有編號 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9，將這 9 顆球全部放到 A 、 B 、 C 三個不同的箱子，每個箱子 3 顆球，請選出正確的選項。

- (1) 所有放球的方式，共有 1680 種方法 (2) 若 A 箱中 3 顆球的編號都是 3 的倍數，則放球的方法共有 60 種
 (3) 若 A 箱中 3 顆球的編號除以 3 的餘數都不同，則放球的方法共有 540 種 (4) 若 A 箱中 3 顆球的編號之和是 3 的倍數，則放球的方法共有 600 種
 (5) 若每個箱子中的 3 顆球編號之和都是 3 的倍數，則放球的方法共有 216 種

6. 已知 $0 < a < \frac{1}{4}$ ，且 $\log_2 a = b$ ，令 $K = \log_2 8a + \log_{4a} \frac{1}{16}$ ，請選出正確的選項。

- (1) $\log_2 8a = 3b$ (2) $\log_{4a} \frac{1}{16} = \frac{-4}{2+b}$ (3) $b < -2$ (4) 若 $K > \log_{\frac{1}{3}} 9$ ，則 $b < -6$
 (5) 承(4)，若 $K > \log_{\frac{1}{3}} 9$ ，則 $\frac{1}{64} < a < \frac{1}{4}$

7. 已知函數 $f(x) = \log x$ 與 $g(x) = x^2 - 4x - 12$ ，令合成函數 $h(x) = f(g(x))$ ，請選出正確的選項。
- (1) 函數 $f(x)$ 在區間 $(0, \infty)$ 上是一個嚴格遞增函數
 (2) 若 x_1, x_2 為兩相異正數，則 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$
 (3) 函數 $g(x)$ 在區間 $(-\infty, 2)$ 上是一個嚴格遞減函數 (4) 函數 $h(x)$ 的定義域為 $(-\infty, 2)$
 (5) 函數 $h(x)$ 在區間 $(-\infty, -2)$ 上是一個嚴格遞減函數
8. 已知兩多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 滿足 $f(0) = g(0)$ ，且當 $x > 0$ 時 $f(x) > g(x) > 0$ 恆成立，設 $t > 0$ ，令函數 $y = f(x) \cdot y = g(x)$ 的圖形與直線 $x = t$ 所圍的區域面積為 $S(t) = \frac{2}{3}t^3 + 3t^2$ ，且此區域繞 x 軸一圈的旋轉體體積為 $V(t) = \left(\frac{4}{5}t^5 + 8t^4 + 32t^3 + 54t^2\right)\pi$ ，請選出正確的選項。
- (1) $S(t) = \int_0^t (f(x) - g(x))dx$ (2) $V(t) = \pi \int_0^t (f(x) - g(x))^2 dx$ (3) $f(x) - g(x) = 2x^2 + 6x$
 (4) $f(x)$ 是二次多項式函數 (5) $g(x)$ 是二次多項式函數

三、選填題 (占18分)

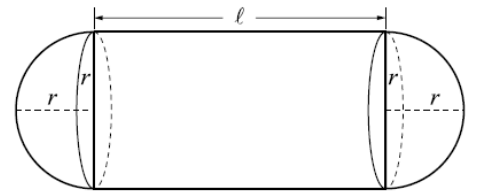
9. 設 m 為實數，平面上的點坐標 $A(1, \sqrt{3})$ 對於直線 $L_1: y = 2\sqrt{3}x$ 的對稱點為 B ， B 對於直線 $L_2: y = mx$ 的對稱點為 $C(-2, 0)$ ，則 m 的值为_____。(化為最簡根式)
10. 已知點 $P(6, 0)$ 是圓 $C: x^2 + y^2 = 100$ 內的一點， A, B 是圓 C 上的相異兩點使得 $\angle APB = 90^\circ$ ，且 \overline{AB} 中點 M 的軌跡為圓 K ，則圓 K 的半徑為_____。(化為最簡根式)
11. 無窮級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin \frac{n\pi}{3}$ 的和為_____。(化為最簡根式)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

已知半徑為 r 的球其表面積為 $4\pi r^2$ ，體積為 $\frac{4\pi r^3}{3}$ 。

今有某企業預計製造如右圖的容器(不計厚度)，其中容器的中間為高 ℓ 公尺的圓柱體，左右兩端為半徑 r 公尺的半球形，依照要求容器的容積為 $\frac{80\pi}{3}$ 立方公尺，且 $\ell \geq 2r$ 。



假設該容器的建造費用僅與表面積有關，已知圓柱體部分每平方公尺的建造費用為 3 萬元，半球形部分每平方公尺的建造費用為 4 萬元，設該容器的建造費用為 y 萬元，試回答下列問題。

12. 試以 r 表示圓柱體的高 ℓ ，並求 r 的範圍。(非選擇題，4 分)

13. 寫出函數式 $y = f(r)$ 。(非選擇題，4分)

14. 求該容器的建造費用最少時的 r 值。(非選擇題，4分)

15-17題為題組

四面體 $OABC$ 中， P 、 Q 、 R 、 S 分別在 \overline{OA} 、 \overline{BC} 、 \overline{OC} 、 \overline{AB} 上，其中 $\overline{OP} = \overline{PA}$ 、 $\overline{BQ} = 2\overline{QC}$ 、 $\overline{CR} = 3\overline{OR}$ 且 $\frac{\overline{AS}}{\overline{BS}} = \frac{s}{1-s}$ ($0 < s < 1$)。若 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ，試回答下列問題。

15. 若 $\overrightarrow{PQ} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ，試求 $x + y + z =$ _____。(選填題，3分)

16. 以 \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} 與 s 表示 \overrightarrow{RS} 。(非選擇題，3分)

17. 若 \overline{PQ} 與 \overline{RS} 相交，試求 s 值。(非選擇題，6分)

RA5121 111 學年度全國高級中學分科測驗數數學甲 A 卷(111-E5)

參考答案

選擇題：1.(4) 2.(5) 3.(1) 4.(2)(4)(5) 5.(1)(3)(4) 6.(2)(3)(5) 7.(1)(3)(5) 8.(1)(3)(4)

選填題：9. $\frac{-3\sqrt{3}}{5}$ 10. $\sqrt{41}$ 11. $\frac{3\sqrt{3}}{14}$

混合題或非選擇題：12. $l = \frac{80}{3r^2} - \frac{4r}{3}$ (公尺), $0 < r \leq 2$ 13. $y = f(r) = \frac{160\pi}{r} + 8\pi r^2$ 14. 2

15. $\frac{1}{2}$ 16. $\overrightarrow{RS} = (1-s)\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{b} - \frac{1}{4}\overrightarrow{c}$ 17. $\frac{1}{7}$