數學甲考科A卷詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(5)	(1)	(2)(4)(5)	(1)(3)(4)	(2)(3)(5)	(1)(3)(5)
8.						
(1)(3)(4)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (4)

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：奇偶函數圖形性質

解析：考慮 $f(-x)=2^{|-x|}\sin(-2x)=-2^{|x|}\sin 2x=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是奇函數，圖形對稱於原點，可刪除(1)(3)(5)

又 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，可刪除(2)

故選(4)。

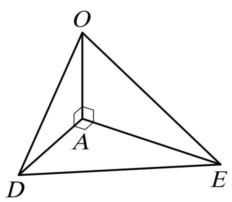
2. (5)

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：兩平面的夾角

解析：過 A 作兩射線 L_1，L_2，使得 L_1 在平面 OAB 上且 L_1 與直線 OA 互相垂直，L_2 在平面 OAC 上且 L_2 與直線 OA 互相垂直，得 $L_1\perp L_2$

設 L_1 與直線 OB 交於 D 點，直線 L_2 與直線 OC 交於 E 點



令 $\overline{OA}=3a$，得 $\overline{OD}=5a$，$\overline{AD}=4a$，$\overline{OE}=9a$，

$\overline{AE}=\sqrt{(9a)^2-(3a)^2}=6\sqrt{2}a$

因為 $L_1\perp L_2$，

所以 $\overline{DE}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{AE}^2}$

$=\sqrt{(4a)^2+(6\sqrt{2}a)^2}$

$=\sqrt{88}a$

由餘弦定理知 $\cos\angle BOC=\dfrac{(5a)^2+(9a)^2-(\sqrt{88}a)^2}{2\cdot 5a\cdot 9a}$

$=\dfrac{1}{5}$

所以 $\sin\angle BOC=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

故選(5)。

3. (1)

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：極值的判斷

解析：$f'(x)=6(x^2+(a+3)x+2(a+1))=6(x+2)(x+(a+1))=0$

得 $x=-2$ 或 $-a-1$

因為 $f(x)$ 在區間 $(0,1)$ 上有極值，

所以 $0<-a-1<1$，得 $-2<a<-1$

故選(1)。

二、多選題

4. (2)(4)(5)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：和角公式

解析：(1)╳：$\overline{PQ}^2=\cos^2 7\theta+\sin^2 7\theta=1$，則 $\overline{PQ}=1$

(2)○(3)╳：$\overline{OQ}^2=(3\cos\theta+\cos 7\theta)^2+(3\sin\theta+\sin 7\theta)^2$

$=(9\cos^2\theta+9\sin^2\theta)$

$+(\cos^2 7\theta+\sin^2 7\theta)$

$+6(\cos 7\theta\cos\theta+\sin 7\theta\sin\theta)$

$=9+1+6\cos(7\theta-\theta)=10+6\cos 6\theta$

因為 $\dfrac{\pi}{9}\le\theta\le\dfrac{5\pi}{18}$，則 $\dfrac{2\pi}{3}\le 6\theta\le\dfrac{5\pi}{3}$

因此 $-1\le\cos 6\theta\le\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 4\le 10+6\cos 6\theta\le 13$

則 $2\le\overline{OQ}\le\sqrt{13}$

(4)(5)○：因為 $\overline{OP}=3$，

所以 $\overline{OQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{PQ}^2=3^2+1=10$，

即 $\overline{OQ}=\sqrt{10}$

此時 $10+6\cos 6\theta=10$

$\Rightarrow\cos 6\theta=0\Rightarrow 6\theta=\dfrac{3\pi}{2}$

即 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

故選(2)(4)(5)。

5. (1)(3)(4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：計數

解析：1～9 這 9 個數字中，3 的倍數是 3，6，9；除以 3 餘 1 的是 1，4，7；除以 3 餘 2 的是 2，5，8，則

(1)○：所有的方法數為 $C_3^9C_3^6C_3^3=1680$ 種

(2)╳：A 箱有 3，6，9 這 3 球，其餘 6 球放至 B、C 兩箱，方法數為 $C_3^6\times C_3^3=20$ 種

(3)○：A 箱可分別在 $\{3,6,9\}$、$\{1,4,7\}$、$\{2,5,8\}$ 這三個集合中任取一球，方法數為 $3^3=27$ 種，剩下 6 顆球放至 B、C 兩箱，所以方法數為 $27\times C_3^6\times C_3^3=540$ 種

(4)○：編號之和是 3 的倍數，有

① 三個數除以 3 的餘數都相同，有 $\{3,6,9\}$、$\{1,4,7\}$、$\{2,5,8\}$ 這 3 種

② 三個數除以 3 的餘數都不同，即選項(3)中的 27 種

所以方法數為 $(3+27)\times C_3^6\times C_3^3=600$ 種

(5)╳：同(4)，

① $\{3,6,9\}$、$\{1,4,7\}$、$\{2,5,8\}$ 分別放至 A、B、C 三箱，有 $3!=6$ 種

② 三個數除以 3 的餘數都不同，則有 $(3!)^3=216$ 種（$\{3,6,9\}$ 分給 A、B、C；$\{1,4,7\}$ 分給 A、B、C；$\{2,5,8\}$ 分給 A、B、C）

所以方法數為 $6+216=222$ 種

故選(1)(3)(4)。

6. (2)(3)(5)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：對數的運算

解析：$b=\log_2 a=\dfrac{\log a}{\log 2}$

(1) ╳：$\log_2 8a=\dfrac{\log 8a}{\log 2}=\dfrac{\log 8+\log a}{\log 2}$

$=\dfrac{3\log 2+\log a}{\log 2}=3+b$

(2) ○：$\log_{4a}\dfrac{1}{16}=\dfrac{\log\frac{1}{16}}{\log 4a}=\dfrac{\log 2^{-4}}{\log 4+\log a}$

$=\dfrac{(-4)\log 2}{2\log 2+\log a}=\dfrac{-4}{2+\frac{\log a}{\log 2}}$

$=\dfrac{-4}{2+b}$

(3) ○：$0<a<\dfrac{1}{4}\Rightarrow\log_2 a=\dfrac{\log a}{\log 2}<\dfrac{\log\frac{1}{4}}{\log 2}=-2$

即 $b<-2$

(4) ╳：$K=3+b-\dfrac{4}{b+2}$

$>\log_{\frac{1}{3}}9=\dfrac{\log 9}{\log\frac{1}{3}}=\dfrac{2\log 3}{-\log 3}=-2$

$\Rightarrow b+5>\dfrac{4}{b+2}$

因為 $b+2<0$，所以 $(b+5)(b+2)<4$

則 $b^2+7b+6<0\Rightarrow(b+6)(b+1)<0$

$\Rightarrow -6<b<-1$

由(3)知 $b<-2$，所以 $-6<b<-2$

(5) ○：由(4)知，$-6<b=\log_2 a<-2$

$\Rightarrow 2^{-6}<a<2^{-2}$，即 $\dfrac{1}{64}<a<\dfrac{1}{4}$

故選(2)(3)(5)。

7. (1)(3)(5)

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：合成函數與函數的遞增與遞減

解析：(1) ○：$f(x)=\log x$ 為一個嚴格遞增函數

(2) ╳：因為 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\dfrac{\log x_1+\log x_2}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\log x_1x_2=\log\sqrt{x_1x_2}$

且 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{x_1x_2}$

則 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\log\dfrac{x_1+x_2}{2}$

$>\log\sqrt{x_1x_2}=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

(3) ○：$g(x)=x^2-4x-12=(x-2)^2-16$，其拋物線圖形開口向上且對稱軸為 $x=2$，

所以在區間 $(-\infty,2)$ 上是一個嚴格遞減函數

(4) ╳：函數 $h(x)$ 的真數 $x^2-4x-12>0$

$\Rightarrow x<-2$ 或 $x>6$

因此定義域為 $(-\infty,-2)\cup(6,\infty)$

(5) ○：由(3)知，函數 $g(x)$ 在區間 $(-\infty,-2)$ 上是一個嚴格遞減函數，且 $f(x)=\log x$ 為嚴格遞增函數，因此 $h(x)$ 在區間 $(-\infty,-2)$ 上是一個嚴格遞減函數

故選(1)(3)(5)。

8. (1)(3)(4)

出處：選修數學甲(上)〈微分〉、選修數學甲(上)〈積分〉

目標：積分的應用、面積、旋轉體體積

解析：(1) ○：因為 $f(x)>g(x)>0$，

所以 $S(t)=\int_0^t(f(x)-g(x))\,dx$

(2) ╳：因為 $f(x)>g(x)>0$，

所以 $V(t)=\pi\int_0^t((f(x))^2-(g(x))^2)\,dx$

(3) ○：由「連續函數取不定積分後再微分會等於原函數」知 $f(x)-g(x)=S'(x)=2x^2+6x$

(4) ○(5) ╳：$(f(x))^2-(g(x))^2=V'(x)$

$=4x^4+32x^3+96x^2+108x$

又 $(f(x))^2-(g(x))^2$

$=(f(x)+g(x))(f(x)-g(x))$

由(3)知 $f(x)-g(x)=2x^2+6x$

兩式相除得 $f(x)+g(x)=2x^2+10x+18$

所以 $f(x)=2x^2+8x+9$，$g(x)=2x+9$

故選(1)(3)(4)。

三、選填題

9. $\dfrac{-3\sqrt{3}}{5}$

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：鏡射矩陣

解析：$L_1：y=2\sqrt{3}x=(\tan\theta)x$

得 $\tan\theta=2\sqrt{3}$，其中 $0^\circ\leq\theta<90^\circ$

$\therefore\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$

則 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{-11}{13}$

令 $B(x,y)$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{-11}{13} & \frac{4\sqrt{3}}{13}\\ \frac{4\sqrt{3}}{13} & \frac{11}{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{13}\\ \frac{15\sqrt{3}}{13}\end{bmatrix}$$

又 B 對於直線 $L_2：y=mx$ 的對稱點為 C

得 $\overline{BC}$ 中點 $M\left(\dfrac{-25}{26},\dfrac{15\sqrt{3}}{26}\right)$ 在 $L_2：y=mx$ 上

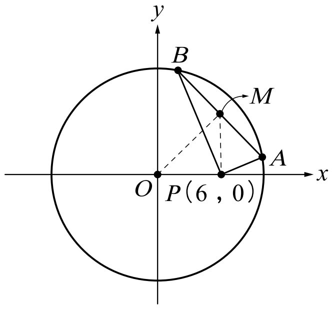
所以 $m=\dfrac{15\sqrt{3}}{-25}=\dfrac{-3\sqrt{3}}{5}$。

10. $\sqrt{41}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓方程式

解析：



設 M 點坐標為 (x, y)

因為 $\overline{OM} \perp \overline{AM}$ 且 $\overline{AM} = \overline{PM}$

所以 $\overline{PM}^2 = \overline{AM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OM}^2$

即 $(x-6)^2 + y^2 = 10^2 - (x^2 + y^2)$

得 $(x-3)^2 + y^2 = 41$

因此半徑為 $\sqrt{41}$。

11. $\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：無窮級數和

解析：$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\frac{n\pi}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \cdots\cdots$

令 $a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(-\dfrac{1}{27}\right)^{n-1}$，$b_n = \dfrac{\sqrt{3}}{18}\left(-\dfrac{1}{27}\right)^{n-1}$

得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\frac{n\pi}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$

又 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\left(-\frac{1}{27}\right)} = \frac{9\sqrt{3}}{56}$

且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{18}}{1-\left(-\frac{1}{27}\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{56}$ 均收斂

得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\frac{n\pi}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \frac{9\sqrt{3}}{56} + \frac{3\sqrt{3}}{56} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. $\ell = \dfrac{80}{3r^2} - \dfrac{4r}{3}$ (公尺)，$0 < r \le 2$

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：函數的圖形

解析：因為容器的體積為 $\dfrac{80\pi}{3}$ 立方公尺

所以 $\dfrac{4\pi r^3}{3} + \pi r^2\ell = \dfrac{80\pi}{3}$

因此 $\ell = \dfrac{80}{3r^2} - \dfrac{4r}{3}$ (公尺)

另由 $\ell = \dfrac{80}{3r^2} - \dfrac{4r}{3} \ge 2r$

可得 $0 < r \le 2$。

◎評分原則

因為容器的體積為 $\dfrac{80\pi}{3}$ 立方公尺

所以 $\dfrac{4\pi r^3}{3} + \pi r^2\ell = \dfrac{80\pi}{3}$

因此 $\ell = \dfrac{80}{3r^2} - \dfrac{4r}{3}$ (公尺)　(2 分)

另由 $\ell = \dfrac{80}{3r^2} - \dfrac{4r}{3} \ge 2r$

可得 $0 < r \le 2$。　(2 分)

13. $y = f(r) = \dfrac{160\pi}{r} + 8\pi r^2$

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：函數的圖形

解析：圓柱的側表面積為

$2\pi r\ell = 2\pi r\left(\dfrac{80}{3r^2} - \dfrac{4r}{3}\right) = \dfrac{160\pi}{3r} - \dfrac{8\pi r^2}{3}$

再加上兩端兩個半球的表面積 $4\pi r^2$

所以 $y = f(r) = 3\left(\dfrac{160\pi}{3r} - \dfrac{8\pi r^2}{3}\right) + 4(4\pi r^2)$

$= \dfrac{160\pi}{r} + 8\pi r^2$。

◎評分原則

圓柱的側表面積為

$2\pi r\ell = 2\pi r\left(\dfrac{80}{3r^2} - \dfrac{4r}{3}\right) = \dfrac{160\pi}{3r} - \dfrac{8\pi r^2}{3}$　(2 分)

再加上兩端兩個半球的表面積 $4\pi r^2$

所以 $y = f(r) = 3\left(\dfrac{160\pi}{3r} - \dfrac{8\pi r^2}{3}\right) + 4(4\pi r^2)$

$= \dfrac{160\pi}{r} + 8\pi r^2$。　(2 分)

14. 2

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：函數的圖形

解析：考慮 $f'(r) = \dfrac{-160\pi}{r^2} + 16\pi r$

$= 8\pi\left(-\dfrac{20}{r^2} + 2r\right) = 0$，

得 $r = \sqrt[3]{10} > 2$

當 $r < \sqrt[3]{10}$ 時，$f'(r) < 0$，此時 $f(r)$ 為遞減函數

因此 $r = 2$ 時，$y = f(r)$ 有最小值。

◎評分原則

考慮 $f'(r) = \dfrac{-160\pi}{r^2} + 16\pi r$

$= 8\pi\left(-\dfrac{20}{r^2} + 2r\right) = 0$，　(2 分)

得 $r = \sqrt[3]{10} > 2$

當 $r < \sqrt[3]{10}$ 時，$f'(r) < 0$，此時 $f(r)$ 為遞減函數　(1 分)

因此 $r = 2$ 時，$y = f(r)$ 有最小值。　(1 分)

15. $\dfrac{1}{2}$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間向量表示法

解析：因為 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}}{3}$

所以 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{c}$

則 $x=-\frac{1}{2}$ ，$y=\frac{1}{3}$ ，$z=\frac{2}{3}$

所以 $x+y+z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ 。

16. $\overrightarrow{RS}=(1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}-\frac{1}{4}\overrightarrow{c}$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間向量表示法

解析：因為 $\overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{c}$

$\overrightarrow{OS}=(1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}$

所以 $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}$

$=(1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}-\frac{1}{4}\overrightarrow{c}$ 。

◎評分原則

因為 $\overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{c}$ (1 分)

$\overrightarrow{OS}=(1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}$ (1 分)

所以 $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}$

$=(1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}-\frac{1}{4}\overrightarrow{c}$ 。 (1 分)

17. $\frac{1}{7}$

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：空間向量表示法與空間中直線

解析：若 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{RS}$ 交點為 T，則可令

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{PQ}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+t\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{c}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{a}+\frac{t}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2t}{3}\overrightarrow{c}$$

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OR}+u\overrightarrow{RS}$$
$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{c}+u\left((1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}-\frac{1}{4}\overrightarrow{c}\right)$$
$$=(1-s)u\overrightarrow{a}+su\overrightarrow{b}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}u\right)\overrightarrow{c}$$

其中 $0<t<1$，$0<u<1$

所以 $\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t=(1-s)u\cdots\cdots\text{①}\\ \frac{1}{3}t=su\cdots\cdots\text{②}\\ \frac{2}{3}t=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}u\cdots\cdots\text{③}\end{cases}$

由①、②知 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}t=u$

代入③可得 $t=\frac{1}{5}$ ，$u=\frac{7}{15}$ ，再由②得到 $s=\frac{1}{7}$ 。

◎評分原則

若 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{RS}$ 交點為 T，則可令

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{PQ}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+t\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{c}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{a}+\frac{t}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2t}{3}\overrightarrow{c}\quad\text{(1 分)}$$

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OR}+u\overrightarrow{RS}$$
$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{c}+u\left((1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}-\frac{1}{4}\overrightarrow{c}\right)$$
$$=(1-s)u\overrightarrow{a}+su\overrightarrow{b}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}u\right)\overrightarrow{c}\quad\text{(1 分)}$$

其中 $0<t<1$，$0<u<1$ (不扣分)

所以 $\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t=(1-s)u\cdots\cdots\text{①}\\ \frac{1}{3}t=su\cdots\cdots\text{②}\\ \frac{2}{3}t=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}u\cdots\cdots\text{③}\end{cases}$ (1 分)

由①、②知 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}t=u$

代入③可得 $t=\frac{1}{5}$ ，$u=\frac{7}{15}$ (2 分)

再由②得到 $s=\frac{1}{7}$ 。 (1 分)