

# 111 學年度全國高級中學分科測驗數學甲 B 卷(111-E5)



## 第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

### 一、單選題(占 18 分)

1. 設  $f(x)$  為一實係數三次多項式，已知  $f(1+i) = 2+3i$  且  $f(1+2i) = -4$ ，其中  $i = \sqrt{-1}$ ，則  $f(3)$  的值為下列哪一個選項？ (1) 27 (2) 28 (3) 29 (4) 30 (5) 31
2. 四面體  $OABC$  中，已知  $\cos \angle AOB = \frac{3}{5}$ ， $\cos \angle AOC = \frac{1}{3}$ ，且平面  $OAB$  與平面  $OAC$  互相垂直，則  $\sin \angle BOC$  的值為下列哪一個選項？  
(1)  $\frac{1}{5}$  (2)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  (3)  $\frac{4}{5}$  (4)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  (5)  $\frac{2\sqrt{6}}{5}$
3. 某中心  $O$  接到  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三個觀測站的報告， $A$ 、 $B$  兩地觀測站同時聽到一聲巨響， $C$  觀測站聽到該巨響的時間比其他兩個觀測站晚 6 秒，已知  $A$  觀測站在  $O$  的正西方、 $B$  觀測站在  $O$  的西  $60^\circ$  北方向、 $C$  觀測站在  $O$  的正東方，且各觀測站到該中心的距離都是 1360 公尺，聲音傳播速度為 340 公尺/秒，則巨響的位置到中心的距離為下列哪一個選項？  
(1)  $340\sqrt{14}$  公尺 (2)  $340\sqrt{21}$  公尺 (3)  $680\sqrt{7}$  公尺  
(4)  $340\sqrt{35}$  公尺 (5)  $340\sqrt{42}$  公尺

### 二、多選題(占 40 分)

4. 在以  $O$  為原點的坐標平面上，有  $P(3\cos \theta, 3\sin \theta)$ 、 $Q(3\cos \theta + \cos 7\theta, 3\sin \theta + \sin 7\theta)$  兩點，其中  $\frac{\pi}{9} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{18}$ ，請選出正確的選項。  
(1)  $\overline{PQ} = \sqrt{7}$  (2)  $\overline{OQ}$  的最小值為 2  
(3)  $\overline{OQ}$  的最大值為 13 (4) 若  $\angle OPQ$  為直角，則  $\overline{OQ} = \sqrt{10}$  (5) 若  $\angle OPQ$  為直角，則  $\theta = \frac{\pi}{4}$
5. 有 9 顆相同的球，每顆球上面分別有編號 1，2，3，4，5，6，7，8，9，將這 9 顆球全部放到  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三個不同的箱子，每個箱子 3 顆球，請選出正確的選項。  
(1) 所有放球的方式，共有 1680 種方法 (2) 若  $A$  箱中 3 顆球的編號都是 3 的倍數，則放球的方法共有 60 種  
(3) 若  $A$  箱中 3 顆球的編號除以 3 的餘數都不同，則放球的方法共有 540 種 (4) 若  $A$  箱中 3 顆球的編號之和是 3 的倍數，則放球的方法共有 600 種  
(5) 若每個箱子中的 3 顆球編號之和都是 3 的倍數，則放球的方法共有 216 種
6. 已知  $0 < a < \frac{1}{4}$ ，且  $\log_2 a = b$ ，令  $K = \log_2 8a + \log_{4a} \frac{1}{16}$ ，請選出正確的選項。  
(1)  $\log_2 8a = 3b$  (2)  $\log_{4a} \frac{1}{16} = \frac{-4}{2+b}$  (3)  $b < -2$  (4) 若  $K > \log_{\frac{1}{3}} 9$ ，則  $b < -6$   
(5) 承(4)，若  $K > \log_{\frac{1}{3}} 9$ ，則  $\frac{1}{64} < a < \frac{1}{4}$
7. 一袋中有相同大小的紅球 5 顆、白球 4 顆，每次從袋中取出 1 球，觀察顏色後放回袋中，直到取出為紅球則停止取球，袋中每一球被取出的機會均等，設隨機變數  $X$  表示取球的總次數，以符號  $P(X=k)$  代表隨機變數  $X=k$  的機率，請選出正確的選項。  
(1)  $P(X=2) = \frac{5}{9}$  (2)  $\frac{P(X=2)}{P(X=1)} = \frac{P(X=4)}{P(X=3)}$  (3)  $\frac{P(X>2)}{P(X>1)} = P(X>1)$   
(4) 隨機變數  $X$  的期望值為 1.8 次 (5) 隨機變數  $X$  的標準差為 1.2 次

8. 已知複數  $z$  滿足  $|z| = 2|z - 3i|$ ，其中  $i = \sqrt{-1}$ ，請選出正確的選項。
- (1)  $|z|$  的最小值為 2 (2) 複數平面上，所有複數  $z$  所形成的圖形所圍的區域面積小於 12
- (3) 複數  $z$  的主幅角最小值為  $\frac{\pi}{3}$  (4) 複數  $z$  的主幅角最大值為  $\frac{\pi}{2}$
- (5) 滿足  $z^{60}$  為正實數的複數  $z$  共有 22 個

### 三、選填題 (占18分)

9. 設  $m$  為實數，平面上的點坐標  $A(1, \sqrt{3})$  對於直線  $L_1: y = 2\sqrt{3}x$  的對稱點為  $B$ ， $B$  對於直線  $L_2: y = mx$  的對稱點為  $C(-2, 0)$ ，則  $m$  的值為\_\_\_\_\_。(化為最簡根式)
10. 已知點  $P(6, 0)$  是圓  $C: x^2 + y^2 = 100$  內的一點， $A, B$  是圓  $C$  上的相異兩點使得  $\angle APB = 90^\circ$ ，且  $\overline{AB}$  中點  $M$  的軌跡為圓  $K$ ，則圓  $K$  的半徑為\_\_\_\_\_。(化為最簡根式)
11. 設  $P$  為坐標平面上的一點， $P$  點移動的規則如下：擲一顆公正的骰子一次，  
 若擲到 1 點或 2 點，則從  $(x, y)$  往  $(x+1, y)$  移動；  
 若擲到 3 點或 4 點，則從  $(x, y)$  往  $(x, y+1)$  移動；  
 若擲到 5 點或 6 點，則從  $(x, y)$  往  $(x+1, y+1)$  移動。  
 已知  $P$  點最初的位置在原點的位置，設投擲 5 次之後  $P$  點位置在  $(X, Y)$ ，則  $X + Y$  的期望值為\_\_\_\_\_。(化為最簡分數)

### 第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

#### 12-14 題為題組

已知橢圓  $\Gamma$  的中心為  $(0, 0)$ ，長軸在  $x$  軸上，且通過  $(1, \frac{4\sqrt{2}}{3})$  與  $(2\sqrt{2}, \frac{2}{3})$  兩點。以  $T$  表示由  $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  定義的平面線性變換，其中  $0 \leq \theta \leq \pi$ 。

12. 試求橢圓  $\Gamma$  的方程式。(非選擇題，4 分)
13. 若  $T$  將  $x$  軸上的點都映射到直線  $x - 2y = 0$  上，試求  $\sin \theta$  與  $\cos \theta$  的值。(非選擇題，3 分)
14. 若將橢圓  $\Gamma$  以  $O(0, 0)$  為中心依逆時針方向旋轉  $\theta$  角 ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) 後，使得長軸在直線  $x - 2y = 0$  上，設旋轉後橢圓的方程式為  $ax^2 + bxy + cy^2 = 36$ ，試求序組  $(a, b, c)$ 。  
 (非選擇題，5 分)

15-17 題為題組

四面體  $OABC$  中， $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$  分別在  $\overline{OA}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{OC}$ 、 $\overline{AB}$  上，其中  $\overline{OP} = \overline{PA}$ 、 $\overline{BQ} = 2\overline{QC}$ 、 $\overline{CR} = 3\overline{OR}$  且  $\frac{\overline{AS}}{\overline{BS}} = \frac{s}{1-s}$  ( $0 < s < 1$ )。若  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ，試回答下列問題。

15. 若  $\overrightarrow{PQ} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ，試求  $x + y + z =$  \_\_\_\_\_。(選填題，3分)

16. 以  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$  與  $s$  表示  $\overrightarrow{RS}$ 。(非選擇題，3分)

17. 若  $\overline{PQ}$  與  $\overline{RS}$  相交，試求  $s$  值。(非選擇題，6分)

RA5122 111 學年度全國高級中學分科測驗數學甲 B 卷(111-E5)

參考答案

選擇題：1.(2) 2.(5) 3.(2) 4.(2)(4)(5) 5.(1)(3)(4) 6.(2)(3)(5) 7.(2)(3)(4)(5) 8.(1)(3)

選填題：9.  $\frac{-3\sqrt{3}}{5}$  10.  $\sqrt{41}$  11.  $\frac{20}{3}$

混合題或非選擇題：12.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  13.  $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  14. (5, -4, 8)

15.  $\frac{1}{2}$  16.  $\overrightarrow{RS} = (1-s)\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{b} - \frac{1}{4}\overrightarrow{c}$  17.  $\frac{1}{7}$