數學甲考科B卷詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(5)	(2)	(2)(4)(5)	(1)(3)(4)	(2)(3)(5)	(2)(3)(4)(5)
8.						
(1)(3)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)

出處：選修數學甲(上)〈複數平面〉

目標：多項式方程式

解析：設 $g(x)=f(x)+4$ 為一實係數三次多項式

$g(1+2i)=f(1+2i)+4=0$

得 $1+2i$ 為 $g(x)=0$ 的一虛根

因為實係數方程式虛根共軛，

所以 $g(x)$ 有 $(x-(1+2i))(x-(1-2i))=x^2-2x+5$ 二次因式

得 $g(x)=f(x)+4=(x^2-2x+5)(ax+b)$

所以 $f(x)=(x^2-2x+5)(ax+b)-4$，其中 a，b 是實數

$f(1+i)=3(a(1+i)+b)-4=2+3i$

得 $(a+b)+ai=2+i$，

所以 $a=b=1$

得 $f(x)=(x^2-2x+5)(x+1)-4$

所以 $f(3)=8\times4-4=28$

故選(2)。

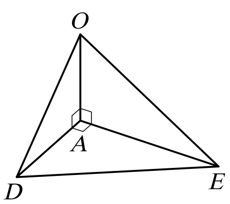
2. (5)

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：兩平面的夾角

解析：過 A 作兩射線 L_1，L_2，使得 L_1 在平面 OAB 上且 L_1 與直線 OA 互相垂直，L_2 在平面 OAC 上且 L_2 與直線 OA 互相垂直，得 $L_1 \perp L_2$

設 L_1 與直線 OB 交於 D 點，直線 L_2 與直線 OC 交於 E 點



令 $\overline{OA}=3a$，得 $\overline{OD}=5a$，$\overline{AD}=4a$，$\overline{OE}=9a$，

$\overline{AE}=\sqrt{(9a)^2-(3a)^2}=6\sqrt{2}a$

因為 $L_1 \perp L_2$，

所以 $\overline{DE}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{AE}^2}=\sqrt{(4a)^2+(6\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{88}a$

由餘弦定理知 $\cos\angle BOC=\dfrac{(5a)^2+(9a)^2-(\sqrt{88}a)^2}{2\cdot 5a\cdot 9a}=\dfrac{1}{5}$

所以 $\sin\angle BOC=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

故選(5)。

3. (2)

出處：選修數學甲(上)〈二次曲線〉

目標：雙曲線

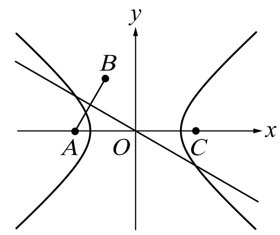
解析：建立坐標平面，以 O 為原點，正東方為 x 軸正向，正北方為 y 軸正向，340 公尺為 1 單位，得 $O(0,0)$、$A(-4,0)$、$B(-2,2\sqrt{3})$、$C(4,0)$

設巨響的位置 $P(x,y)$，因為 A、B 兩地觀測站同時聽到一聲巨響，所以 $\overline{PA}=\overline{PB}$，得 P 在 $\overline{AB}$ 中垂線上

$\overline{AB}$ 中點為 $(-3,\sqrt{3})$，直線 AB 斜率為 $\sqrt{3}$，所以 $\overline{AB}$ 中垂線為 $y-\sqrt{3}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+3)$，即 $x+\sqrt{3}y=0$

又 C 觀測站聽到該巨響的時間比其他兩個觀測站晚 6 秒，所以 $\overline{PC}-\overline{PA}=6$

得 P 在以 A，C 為焦點，$2a=6$ 的雙曲線左支上



雙曲線的中心為 $O(0,0)$，$a=3$，$c=4$，得

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{7}$

所以雙曲線的方程式為 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$，

與 $x+\sqrt{3}y=0$ 解聯立得

$(x,y)=\left(-\dfrac{\sqrt{63}}{2},\dfrac{\sqrt{21}}{2}\right)$ 或 $\left(\dfrac{\sqrt{63}}{2},-\dfrac{\sqrt{21}}{2}\right)$ (不合)

距離為 $340\sqrt{x^2+y^2}=340\sqrt{\dfrac{63}{4}+\dfrac{21}{4}}=340\sqrt{21}$ 公尺

故選(2)。

二、多選題

4. (2)(4)(5)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：和角公式

解析：(1)╳：$\overline{PQ}^2=\cos^2 7\theta+\sin^2 7\theta=1$，則 $\overline{PQ}=1$

(2)○(3)╳：$\overline{OQ}^2=(3\cos\theta+\cos 7\theta)^2+(3\sin\theta+\sin 7\theta)^2$

$=(9\cos^2\theta+9\sin^2\theta)$

$+(\cos^2 7\theta+\sin^2 7\theta)$

$+6(\cos 7\theta\cos\theta+\sin 7\theta\sin\theta)$

$=9+1+6\cos(7\theta-\theta)=10+6\cos 6\theta$

因為 $\dfrac{\pi}{9}\le\theta\le\dfrac{5\pi}{18}$，則 $\dfrac{2\pi}{3}\le 6\theta\le\dfrac{5\pi}{3}$

因此 $-1\le\cos 6\theta\le\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 4\le 10+6\cos 6\theta\le 13$

則 $2\le\overline{OQ}\le\sqrt{13}$

(4)(5)○：因為 $\overline{OP}=3$，

所以 $\overline{OQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{PQ}^2=3^2+1=10$，

即 $\overline{OQ}=\sqrt{10}$

此時 $10+6\cos 6\theta=10$

$\Rightarrow \cos 6\theta=0 \Rightarrow 6\theta=\dfrac{3\pi}{2}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

故選(2)(4)(5)。

5. (1)(3)(4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：計數

解析：1～9 這 9 個數字中，3 的倍數是 3，6，9；除以 3 餘 1 的是 1，4，7；除以 3 餘 2 的是 2，5，8，則

(1) ○：所有的方法數為 $C^9_3C^6_3C^3_3=1680$ 種

(2) ╳：A 箱有 3，6，9 這 3 球，其餘 6 球放至 B、C 兩箱，方法數為 $C^6_3\times C^3_3=20$ 種

(3) ○：A 箱可分別在 {3,6,9}、{1,4,7}、{2,5,8} 這三個集合中任取一球，方法數為 $3^3=27$ 種，剩下 6 顆球放至 B、C 兩箱，所以方法數為 $27\times C^6_3\times C^3_3=540$ 種

(4) ○：編號之和是 3 的倍數，有

① 三個數除以 3 的餘數都相同，有 {3,6,9}、{1,4,7}、{2,5,8} 這 3 種

② 三個數除以 3 的餘數都不同，即選項(3)中的 27 種

所以方法數為 $(3+27)\times C^6_3\times C^3_3=600$ 種

(5) ╳：同(4)，

① {3,6,9}、{1,4,7}、{2,5,8} 分別放至 A、B、C 三箱，有 $3!=6$ 種

② 三個數除以 3 的餘數都不同，則有 $(3!)^3=216$ 種 ({3,6,9} 分給 A、B、C；{1,4,7} 分給 A、B、C；{2,5,8} 分給 A、B、C)

所以方法數為 $6+216=222$ 種

故選(1)(3)(4)。

6. (2)(3)(5)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：對數的運算

解析：$b=\log_2 a=\dfrac{\log a}{\log 2}$

(1) ╳：$\log_2 8a=\dfrac{\log 8a}{\log 2}$

$=\dfrac{\log 8+\log a}{\log 2}$

$=\dfrac{3\log 2+\log a}{\log 2}$

$=3+b$

(2) ○：$\log_{4a}\dfrac{1}{16}=\dfrac{\log\frac{1}{16}}{\log 4a}$

$=\dfrac{\log 2^{-4}}{\log 4+\log a}$

$=\dfrac{(-4)\log 2}{2\log 2+\log a}$

$=\dfrac{-4}{2+\frac{\log a}{\log 2}}$

$=\dfrac{-4}{2+b}$

(3) ○：$0<a<\dfrac{1}{4}\Rightarrow \log_2 a=\dfrac{\log a}{\log 2}<\dfrac{\log\frac{1}{4}}{\log 2}=-2$

即 $b<-2$

(4) ╳：$K=3+b-\dfrac{4}{b+2}$

$>\log_{\frac{1}{3}}9=\dfrac{\log 9}{\log\frac{1}{3}}=\dfrac{2\log 3}{-\log 3}=-2$

$\Rightarrow b+5>\dfrac{4}{b+2}$

因為 $b+2<0$，所以 $(b+5)(b+2)<4$

則 $b^2+7b+6<0\Rightarrow(b+6)(b+1)<0$

$\Rightarrow -6<b<-1$

由(3)知 $b<-2$，所以 $-6<b<-2$

(5) ○：由(4)知，$-6<b=\log_2 a<-2$

$\Rightarrow 2^{-6}<a<2^{-2}$，即 $\dfrac{1}{64}<a<\dfrac{1}{4}$

故選(2)(3)(5)。

7. (2)(3)(4)(5)

出處：選修數學甲(上)〈分布與統計〉

目標：幾何分布

解析：(1) ╳：因為 $P(X=k)=\dfrac{5}{9}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^{k-1}$，

所以 $P(X=2)=\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{20}{81}$

(2) ○：$\dfrac{P(X=2)}{P(X=1)}=\dfrac{P(X=4)}{P(X=3)}=\dfrac{4}{9}$

(3) ○：$P(X>2)=1-P(X=1)-P(X=2)$

$=1-\dfrac{5}{9}-\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{16}{81}$

$P(X>1)=1-P(X=1)=1-\dfrac{5}{9}=\dfrac{4}{9}$

所以 $\dfrac{P(X>2)}{P(X>1)}=\dfrac{4}{9}=P(X>1)$

(4)(5) ○：重複操作一個成功機率為 $p\,(0<p<1)$ 的伯努力試驗，每次試驗的結果皆獨立

設隨機變數 X 表示第一次成功發生所需的試驗次數，

則 X 的期望值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$，

X 的標準差 $\sigma_X=\dfrac{\sqrt{1-p}}{p}$

$p=\dfrac{5}{9}$ 代入得 $E(X)=\dfrac{9}{5}=1.8$ (次)，

$\sigma_X=\dfrac{6}{5}=1.2$ (次)

故選(2)(3)(4)(5)。

8. (1)(3)

出處：選修數學甲(上)〈複數平面〉

目標：複數平面、棣美弗定理

解析：設 $z=x+yi$，其中 x，y 為實數

因為 $|z|=2|z-3i|$，

得 $x^2+y^2=4(x^2+(y-3)^2)$，即 $x^2+(y-4)^2=4$

所以在複數平面上滿足條件的複數 z 落在圓心為 $A(4i)$，半徑為 2 的圓上

(1) ○：$|z|$ 的最小值為 2

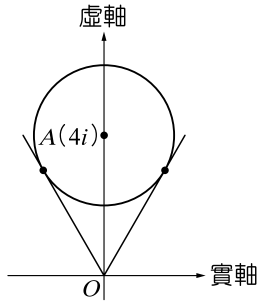
⑵ ╳：複數平面上，所有複數 z 所形成的圖形所圍的區域面積為 $4\pi>12$

⑶ ○⑷ ╳：坐標平面上，設通過原點的直線 $L：y=mx$ 與圓 $x^2+(y-4)^2=4$ 相切，

得圓心 $(0,4)$ 到直線 L 的距離為

$\dfrac{4}{\sqrt{m^2+1}}=2$，解得 $m=\pm\sqrt{3}$，

因此複數 z 的主輻角最小值為 $\dfrac{\pi}{3}$，最大值為 $\dfrac{2\pi}{3}$



⑸ ╳：設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，

其中 $r>0$，$\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{2\pi}{3}$

得 $z^{60}=r^{60}(\cos 60\theta+i\sin 60\theta)$，

其中 $20\pi\le 60\theta\le 40\pi$

又 z^{60} 為正實數，

所以 $60\theta=2k\pi$，其中 k 是整數

得 $\theta=\dfrac{2k\pi}{60}$，其中 $k=10，11，12，\cdots\cdots，20$

當 $k=10，20$ 時，滿足條件的複數 z 恰有一個

當 $k=11，12，\cdots\cdots，19$ 時，滿足條件的複數 z 恰有兩個

所求為 $2+2\times 9=20$ 個

故選⑴⑶。

三、選填題

9. $\dfrac{-3\sqrt{3}}{5}$

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：鏡射矩陣

解析：$L_1：y=2\sqrt{3}x=(\tan\theta)x$

得 $\tan\theta=2\sqrt{3}$，其中 $0^\circ\le\theta<90^\circ$

$\therefore\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$

則 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{-11}{13}$

令 $B(x,y)$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{-11}{13} & \dfrac{4\sqrt{3}}{13}\\ \dfrac{4\sqrt{3}}{13} & \dfrac{11}{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{13}\\ \dfrac{15\sqrt{3}}{13}\end{bmatrix}$$

又 B 對於直線 $L_2：y=mx$ 的對稱點為 C

得 $\overline{BC}$ 中點 $M\left(\dfrac{-25}{26}，\dfrac{15\sqrt{3}}{26}\right)$ 在 $L_2：y=mx$ 上

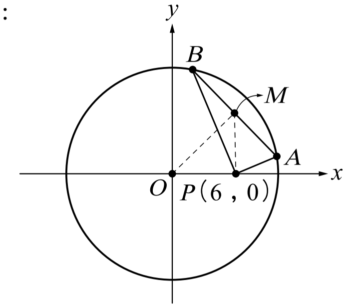
所以 $m=\dfrac{15\sqrt{3}}{-25}=\dfrac{-3\sqrt{3}}{5}$。

10. $\sqrt{41}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓方程式

解析：



設 M 點坐標為 (x,y)

因為 $\overline{OM}\perp\overline{AM}$ 且 $\overline{AM}=\overline{PM}$

所以 $\overline{PM}^2=\overline{AM}^2=\overline{OA}^2-\overline{OM}^2$

即 $(x-6)^2+y^2=10^2-(x^2+y^2)$

得 $(x-3)^2+y^2=41$

因此半徑為 $\sqrt{41}$。

11. $\dfrac{20}{3}$

出處：選修數學甲(上)〈分布與統計〉

目標：二項分布的期望值

解析：設隨機變數 X 為投擲骰子 5 次，擲到 1 點、2 點、5 點或 6 點的次數，隨機變數 Y 為投擲骰子 5 次，擲到 3 點、4 點、5 點或 6 點的次數

則 $E(X)=5\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{3}$，

$E(Y)=5\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{3}$

得 $E(X+Y)=\dfrac{10}{3}+\dfrac{10}{3}=\dfrac{20}{3}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

出處：選修數學甲(上)〈二次曲線〉

目標：橢圓方程式

解析：設橢圓 Γ 的方程式為 $\dfrac{x^2}{s}+\dfrac{y^2}{t}=1$，

其中 $s>0$ 且 $t>0$

$\left(1,\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ 與 $\left(2\sqrt{2},\dfrac{2}{3}\right)$ 兩點代入得 $\begin{cases}\dfrac{1}{s}+\dfrac{32}{9t}=1\\ \dfrac{8}{s}+\dfrac{4}{9t}=1\end{cases}$

解得 $\begin{cases}s=9\\ t=4\end{cases}$

故橢圓 Γ 的方程式為 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$。

◎評分原則

設橢圓 Γ 的方程式為 $\dfrac{x^2}{s}+\dfrac{y^2}{t}=1$，

其中 $s>0$ 且 $t>0$

$\left(1\,,\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ 與 $\left(2\sqrt{2}\,,\dfrac{2}{3}\right)$ 兩點代入得 $\begin{cases}\dfrac{1}{s}+\dfrac{32}{9t}=1\\ \dfrac{8}{s}+\dfrac{4}{9t}=1\end{cases}$　(2 分)

解得 $\begin{cases}s=9\\ t=4\end{cases}$　(1 分)

故橢圓 Γ 的方程式為 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$。　(1 分)

13. $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\left(=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：旋轉變換

解析：T 表示以 $O(0\,,0)$ 為中心依逆時針方向旋轉 θ 角的線性變換

因為變換後的點都映射到直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ 上，

得旋轉角 θ 滿足 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$

又 $0\le\theta\le\pi$，

得 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$。

◎評分原則

T 表示以 $O(0\,,0)$ 為中心依逆時針方向旋轉 θ 角的線性變換

因為變換後的點都映射到直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ 上，

得旋轉角 θ 滿足 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$　(1 分)

又 $0\le\theta\le\pi$，

得 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，　(1 分)

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$。　(1 分)

14. $(5\,,-4\,,8)$

出處：選修數學甲(上)〈二次曲線〉

目標：橢圓方程式

解析：設旋轉前、後橢圓上的點坐標分別為 $(x\,,y)$、$(x'\,,y')$

得 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

即 $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\dfrac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{-x'+2y'}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$

代入 Γ 得 $4\left(\dfrac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(\dfrac{-x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)^2=36$

整理得 $5(x')^2-4x'y'+8(y')^2=36$

故序組 $(a\,,b\,,c)=(5\,,-4\,,8)$。

◎評分原則

設旋轉前、後橢圓上的點坐標分別為 $(x\,,y)$、$(x'\,,y')$

得 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$　(1 分)

即 $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\dfrac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{-x'+2y'}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$　(2 分)

代入 Γ 得 $4\left(\dfrac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(\dfrac{-x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)^2=36$　(1 分)

整理得 $5(x')^2-4x'y'+8(y')^2=36$

故序組 $(a\,,b\,,c)=(5\,,-4\,,8)$。　(1 分)

15. $\dfrac{1}{2}$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間向量表示法

解析：因為 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}}{3}$

所以 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{b}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{c}$

則 $x=-\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{3}$，$z=\dfrac{2}{3}$

所以 $x+y+z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$。

16. $\overrightarrow{RS}=(1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{c}$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間向量表示法

解析：因為 $\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{c}$

$\overrightarrow{OS}=(1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}$

所以 $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}$

$=(1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{c}$。

◎評分原則

因為 $\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{c}$　(1 分)

$\overrightarrow{OS}=(1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}$　(1 分)

所以 $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}$

$=(1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{c}$。　(1 分)

17. $\frac{1}{7}$

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：空間向量表示法與空間中直線

解析：若 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{RS}$ 交點為 T，則可令

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + t\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{c}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{a} + \frac{t}{3}\overrightarrow{b} + \frac{2t}{3}\overrightarrow{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OR} + u\,\overrightarrow{RS}\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{c} + u\left((1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}-\frac{1}{4}\overrightarrow{c}\right)\\ &= (1-s)u\,\overrightarrow{a} + su\,\overrightarrow{b} + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}u\right)\overrightarrow{c}\end{aligned}$$

其中 $0<t<1$，$0<u<1$

所以 $\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t=(1-s)u \cdots\cdots① \\ \frac{1}{3}t=su \cdots\cdots② \\ \frac{2}{3}t=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}u \cdots\cdots③\end{cases}$

由①、②知 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}t=u$

代入③可得 $t=\frac{1}{5}$，$u=\frac{7}{15}$

再由②得到 $s=\frac{1}{7}$。

◎**評分原則**

若 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{RS}$ 交點為 T，則可令

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + t\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{c}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{a} + \frac{t}{3}\overrightarrow{b} + \frac{2t}{3}\overrightarrow{c} \quad \text{(1 分)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OR} + u\,\overrightarrow{RS}\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{c} + u\left((1-s)\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}-\frac{1}{4}\overrightarrow{c}\right)\\ &= (1-s)u\,\overrightarrow{a} + su\,\overrightarrow{b} + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}u\right)\overrightarrow{c} \quad \text{(1 分)}\end{aligned}$$

其中 $0<t<1$，$0<u<1$　(不扣分)

所以 $\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t=(1-s)u \cdots\cdots① \\ \frac{1}{3}t=su \cdots\cdots② \\ \frac{2}{3}t=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}u \cdots\cdots③\end{cases}$　(1 分)

由①、②知 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}t=u$

代入③可得 $t=\frac{1}{5}$，$u=\frac{7}{15}$　(2 分)

再由②得到 $s=\frac{1}{7}$。　(1 分)