

全國公私立 111 學年度分科測驗第五次數學甲(卷一)



第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

- 天文學中是根據肉眼觀測星球的亮度來定義其星等；若織女星的亮度為 F_0 ，則一顆亮度為 F 的星星，其星等定義為 $m = -2.5 \log \frac{F}{F_0}$ ，稱為 m 等星。2022 年中，有顆位在鯨魚座的暗星「蒭藁增二」悄悄變亮，原為 10 等星，後來變成 2 等星，比北極星還亮，試問其亮度約變為原來的幾倍？ (1) 3.2 (2) 100 (3) 1000 (4) 1600 (5) 2000
- 設 $f(x) = a(x-2)^3 + 2x - 1$ ，且 $f(x)$ 除以 $x^2 - 1$ 的餘式為 $28x - 29$ ，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $mx + n$ ，則 $m+n = ?$ (1) -2 (2) -1 (3) 0 (4) 1 (5) 2
- 有一款籃球手遊，玩家需要安排上場的 5 個球員(一個中鋒，二個前鋒、二個後衛)球員 A 的特殊屬性是當他是五人當中戰力最高者(戰力未加成前)，可以加成自身戰力的 25%。球員 B 的特殊屬性是當他和球員 C 同時上場時，自身的戰力可以加成 15%(只有球員 B 加成)，球員 F 的特殊屬性是當和 G 、 H 三人同時上場時，可讓其他兩人戰力都提升 10%。

表(1)

	位置		中鋒			前鋒		後衛		
球員	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
戰力	1200	1400	1000	950	1100	1300	800	700	1000	850

若整隊的戰力就是將上場 5 人的戰力加總起來，試根據表(1)資料，試求可排出隊伍戰力的最大值是多少？ (1) 5450 (2) 5550 (3) 5650 (4) 5760 (5) 5860

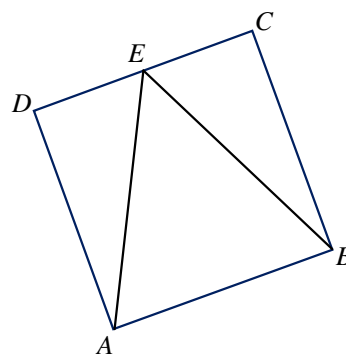
二、多選題(占 40 分)

- 坐標平面上有一圓，圓心 $O(3,3)$ 在 $\triangle ABC$ 的 \overline{AC} 上，並與 \overline{BC} ， \overline{AB} 分別切於 $D(6,2)$ 、 $E(4,6)$ 兩點。 $\overline{AO} = 5\sqrt{2}$ ，試選出正確的選項。

- (1) 直線 AB 的方程式 $x + 3y = 22$ (2) B 點坐標為 $(7,5)$ (3) A 點坐標為 $(-2,7)$
 (4) $\triangle ABC$ 為直角三角形 (5) $\triangle ABC$ 面積為 15

- 如圖(1)，邊長為 4 的正方形 $ABCD$ 中有一個等腰三角形 ABE ，若 $\overrightarrow{AB} = (4 \cos \theta, 4 \sin \theta)$ ，試選出正確的選項。

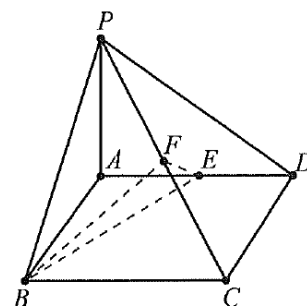
- (1) $\cos \angle BAE = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (2) $\overrightarrow{AE} = (4 \cos(\theta + 60^\circ), 4 \sin(\theta + 60^\circ))$
 (3) $\overrightarrow{AC} = (4 \cos(\theta + 45^\circ), 4 \sin(\theta + 45^\circ))$ (4) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
 (5) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} = 8$



圖(1)

- 一個底面為長方形的四角錐 $P-ABCD$ ，如圖(2)所示。且 \overline{PA} 垂直底面 $ABCD$ ， E ， F 分別是 \overline{DA} ， \overline{PC} 的中點， $\overline{PA} = \overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 4\sqrt{2}$ ，試選出正確的選項。

- (1) $\overline{PC} = 8$ (2) $\overline{BF} = 4$ (3) \overline{PC} 垂直平面 BEF
 (4) $\triangle BEF$ 面積為 $8\sqrt{2}$ (5) 四面體 $PBEF$ 的面積為 $\frac{16\sqrt{2}}{3}$



圖(2)

7. 已知 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，若 $\det(A) = -1, a > 0, d > 0, B = \frac{A - A^{-1}}{2}$ ，試選出正確的選項。

(1) $bc > 0$ (2) $A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (3) B^{-1} 必存在

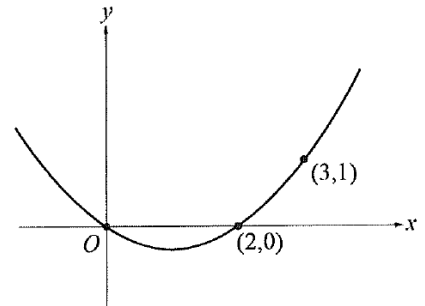
(4) 存在一個方陣 A ，使得 $B^5 = \begin{bmatrix} 2023 & 102 \\ 102 & 2023 \end{bmatrix}$ (5) 若 $\det(B) = 36$ ，則 bc 的最大值為 37

8. 設三次多項式函數 $f(x)$ 滿足 $f'(1) = 5, f'(-5) = 5$ ，且 $f(x)$ 的領導係數為負，則下列哪些選項是正確的？ (1) $f(x)$ 有兩個極值 (2) 反曲點的 x 坐標為 -2 (3) $f'(0) > 0$
(4) $f(x)$ 在區間 $(-5, 1)$ 遞增 (5) $f(x)$ 在 $x > 1$ 遞減

三、選填題 (占 18 分)

9. 已知 $\triangle ABC$ 中， $A(1, 2), B(5, -2), C(a, a+2)$ ， a 為負整數，若 $10 \leq \triangle ABC$ 的面積 ≤ 12 ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 已知 $f'(x)$ 的圖形為一個拋物線，如圖(3)所示，且 $f(0) = 0$ ，試求 $y = f(x)$ 的圖形和 x 軸所圍出的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



圖(3)

11. 四郎為了準備期末考試，決定妥善安排六科的復習計畫：國、英、數、物、化、生，他決定不要連續復習國英這兩科(國英或英國都不行)，也不要連續復習數物這兩科(數物或物數都不行)，而物化生三科復習的順序是物→化→生，試問這六科復習順序的方法數共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種。

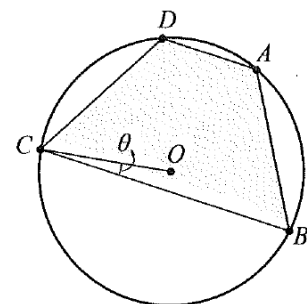
第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

單位圓內有一個等腰梯形 $ABCD$ ，圓心為 O ，若 $\angle ABC = \angle BCD = 60^\circ$ ，如圖(4)，試回答下列問題。

12. 請選出正確選項。(多選題，4 分)

- (1) $\angle CDO = 60^\circ - \theta$ (2) $\angle ADO = 60^\circ - \theta$
(3) $\angle COD = 60^\circ + 2\theta$ (4) $\angle AOD = 120^\circ - \theta$
(5) $\overline{BC} = 2 \cos \theta$



圖(4)

13. 若等腰梯形的高可表示為 $a \cos \theta + b \sin \theta$ ，求實數對 $(a, b) = ?$ (非選擇題，3分)

14. 試求當 θ 是多少時，梯形 $ABCD$ 有最大面積，此時的最大面積是多少？(非選擇題，5分)

15-17題為題組

箱中有編號1號到5號的5顆大小相同的球，每次從箱中任意取出一球，再放回箱中，重複取球 n 次，並記錄這 n 次取球的數字總和為 S_n ，假設 S_n 除以3會餘1的機率為 P_n ，例如時 P_1 表示取球1次， S_1 除以3會餘1的機率，所以需取到1，4號，故 $P_1 = \frac{2}{5}$ 。試問答下列問題。

15. 若 $P_{n+1} = aP_n + b$ ，則實數對 $(a, b) = ?$ (非選擇題，4分)

16. 求出 $P_n = ?$ (以 n 表示) (非選擇題，4分)

17. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = ?$ (非選擇題，4分)

RA5123 全國公私立 111 學年度分科測驗第五次數學甲(卷一)

參考答案

選擇題：1.(4) 2.(2) 3.(4) 4.(1)(2)(4) 5. (4)(5) 6.(1)(2)(3)(5) 7.(1)(3)(5) 8.(1)(2)(3)(4)

選填題：9. -2 10. $\frac{3}{4}$ 11. 56

混合題或非選擇題：12. (1)(3)(5) 13. $(a,b) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ 14. $\frac{3}{2}$

15. $(a,b) = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ 16. $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}(-\frac{1}{5})^{n-1}$ 17. $\frac{1}{3}$