全國公私立高級中學111學年度分科測驗第五次聯合模擬考試

數學甲考科解析（卷 I ）

考試日期：112 年 2 月 22~23 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9-1	9-2	10-1	10-2	11-1	11-2
4	2	4	124	45	1235	135	1234	−	2	3	4	5	6
12	13	14	15	16	17								
135													

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 由 10 等星，$10=-2.5\log\dfrac{F_{10}}{F_0}$，

由 2 等星，$2=-2.5\log\dfrac{F_2}{F_0}$，

兩式相減 $-8=-2.5\log\dfrac{F_2}{F_{10}}$

$\Rightarrow \log\dfrac{F_2}{F_{10}}=3.2=3+0.2<3+\log 2\approx 3.301$

$\Rightarrow \dfrac{F_2}{F_{10}}=10^{3.2}\approx 1600<2000$，

故選(4)。

2. <法一>

$f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式為 $28x-29$，

可得 $f(x)=(x^2-1)Q(x)+28x-29\Rightarrow f(1)=28-29=-1$，

$f(1)=a(1-2)^3+2-1=-1\Rightarrow a=2$，

$f(x)=2(x-2)^3+2x-1=2(x-1-1)^3+2x-1$

$=2[(x-1)^3-3(x-1)^2+3(x-1)-1]+2x-1$

$=(x-1)^2[2(x-1)-6]+6x-8+2x-1$

$=(x-1)^2(2x-8)+8x-9$，餘式 $8x-9$

所以 $m+n=-1$，

故選(2)。

<法二>

亦可將 $f(x)=2(x-2)^3+2x-1$ 展開，

用長除法除以 $(x-1)^2$ 得之。

3. 當 F 上場時，可讓 G；H 兩人的戰力變成 880 和 770，

此時 G、H 同時上場的戰力為 $1650<1000+850=I+J$，

所以讓 F、G、H 都在場上，不會最有利。

(Ⅰ) 球員 B 上場，不配 C：

$B+E+F+I+J=1400+1100+1300+1000+850=5650$。

(Ⅱ) 球員 BC 同時上場，B 戰力變成 1610，

$B+C+F+I+J=1610+1000+1300+1000+850=5760$。

(Ⅲ) 當 A 戰力最高時，此時不能選 F，

戰力會變成 $1200\times 1.25=1500$，

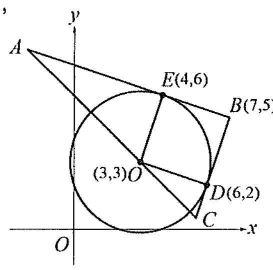
$A+E+C+I+J=1500+1100+1000+1000+850=5450$。

故戰力的最大值為 5760，

故選(4)。

二、多選題

4. (1) ○：因為直線 AB 切圓於 E 點，



$m_{\overline{OE}}=\dfrac{6-3}{4-3}=3$

$\Rightarrow m_{\overline{AB}}=-\dfrac{1}{3}$，

所以直線 AB 方程式為

$y-6=-\dfrac{1}{3}(x-4)$

$\Rightarrow x+3y=22$。

(2) ○：同理可求出直線 BC 為 $3x-y=16$

$\Rightarrow\begin{cases}x+3y=22\\3x-y=16\end{cases}\Rightarrow B(7,5)$。

(3) ×：假設 $A(22-3t,t)$，$\overline{AO}^2=(19-3t)^2+(3-t)^2=50$

$\Rightarrow t^2-12t+32=0\Rightarrow t=8,4$

$\Rightarrow A(-2,8)$ 或 $(10,4)$，由圖可知 $(10,4)$ 不合，

故 $A(-2,8)$。

(4) ○：由 $m_{\overline{AB}}=-\dfrac{1}{3}$，$m_{\overline{BC}}=3\Rightarrow$ 可知 $\angle B=90°$，

所以為直角三角形。

(5) ×：半徑 $\overline{OE}=\sqrt{(4-3)^2+(6-3)^2}=\sqrt{10}$，

$\overline{AE}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$，

$\triangle AOE$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}=10$，

又 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle AOE}=(\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}})^2=(\dfrac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{10}})^2=\dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow \triangle ABC=\dfrac{9}{4}\times 10=\dfrac{45}{2}$。

故選(1)(2)(4)。

5. (1) ×：$\triangle ADE$ 中，$\angle BAE=\angle AED$，

$\cos\angle BAE=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\dfrac{2}{\sqrt{4^2+2^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$。

(2) ×：$|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

$\overrightarrow{AE}=(2\sqrt{5}\cos(\theta+\angle BAE),2\sqrt{5}\sin(\theta+\angle BAE))$

$\neq(4\cos(\theta+60°),4\sin(\theta+60°))$。

(3) ×：$\overrightarrow{AC}=(4\sqrt{2}\cos(\theta+45°),4\sqrt{2}\sin(\theta+45°))$。

(4) ○：$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$。

(5) ○：$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BD}\cdot(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 4\cdot\cos 135°+4\sqrt{2}\cdot 4\cdot\cos 45°=8$。

故選(4)(5)。

6. 定坐標 $A(0,0,0)$, $B(4,0,0)$, $P(0,0,4)$,

$C(4,4\sqrt{2},0)$, $E(0,2\sqrt{2},0)$, $F(2,2\sqrt{2},2)$。

(1) ○：$\overline{PC}=\sqrt{4^2+4^2+(4\sqrt{2})^2}=8$。

(2) ○：$\overline{BF}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2+2^2}=4$。

(3) ○：$\overrightarrow{BF}=(-2,2\sqrt{2},2)$，$\overrightarrow{BE}=(-4,2\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{BF}\times\overrightarrow{BE}=(-4\sqrt{2},-8,4\sqrt{2})\,//\,\overrightarrow{PC}=(4,4\sqrt{2},-4)$，

可知 $\overline{PC}$ 垂直平面 BEF。

(4) ×：$\triangle BEF$ 面積 $=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BF}\times\overrightarrow{BE}|$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-4\sqrt{2})^2+(-8)^2+(4\sqrt{2})^2}$

$=4\sqrt{2}$。

(5) ○：四面體 $PBEF=\dfrac{1}{3}\times 4\sqrt{2}\times\overline{PF}=\dfrac{1}{3}\times 4\sqrt{2}\times 4$

$=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$。

故選(1)(2)(3)(5)。

7. (1) ○：$\det(A)=ad-bc=-1 \Rightarrow bc=ad+1>0$。

(2) ×：$A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}$。

(3) ○：$B=\dfrac{A-A^{-1}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(B)=\dfrac{1}{4}(a+d)^2\neq 0$（因為 $a>0$，$d>0$，所以 $a+d\neq 0$），

故 B^{-1} 必存在。

(4) ×：$B=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix}$

$\Rightarrow B^5=\dfrac{1}{32}\begin{bmatrix} (a+d)^5 & 0 \\ 0 & (a+d)^5 \end{bmatrix}$，

故不存在 A，使得 $B^5=\begin{bmatrix} 2023 & 102 \\ 102 & 2023 \end{bmatrix}$。

(5) ○：$\det(B)=\dfrac{1}{4}(a+d)^2=36$

$\Rightarrow a+d=\pm 12$（取正，因為 $a>0$，$d>0$），

由算幾不等式 $\dfrac{a+d}{2}\geq\sqrt{ad} \Rightarrow (\dfrac{12}{2})^2\geq ad$，

由 $bc=ad+1\leq 36+1=37$，故 bc 最大值 37。

故選(1)(3)(5)。

8. 假設 $f'(x)-5=a(x-1)(x+5)=ax^2+4ax-5a$，$a<0$，$f''(x)=2ax+4a$。

(1) ○：考慮 $f'(x)=ax^2+4ax-5a+5=0$，

$D=16a^2-4a(5-5a)=36a^2-20a>0$（$\because a<0$）

$\Rightarrow f'(x)=0$ 有二實根，可得 $f(x)$ 必有兩個極值。

(2) ○：$f''(x)=0 \Rightarrow x=-2$，

所以反曲點的 x 坐標為 -2。

(3) ○：$f'(0)=-5a+5>0$。

(4) ○：$f'(x)=a(x-1)(x+5)+5$，

當 x 在區間 $(-5,1)$ 時，

$f'(x)=a(x-1)(x+5)+5>0$，

故在此區間遞增。

(5) ×：當 $x>1$ 時，$a(x-1)(x+5)<0$，

但無法判別 $a(x-1)(x+5)+5$ 的正負。

故選(1)(2)(3)(4)

三、選填題

9. $\overrightarrow{AB}=(4,-4)$，$\overrightarrow{AC}=(a-1,a)$，

由題意可得 $10\leq\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ a-1 & a \end{vmatrix}\right|\leq 12 \Rightarrow 5\leq|2a-1|\leq 6$

$\Rightarrow 5\leq 2a-1\leq 6$，$-6\leq 2a-1\leq -5$

$\Rightarrow 3\leq a\leq\dfrac{7}{2}$ 或 $\dfrac{-5}{2}\leq a\leq -2$，

因為 a 為負整數，故 $a=-2$

10. $f'(x)$ 的圖形交 x 軸於 $(0,0)$ 與 $(2,0)$，

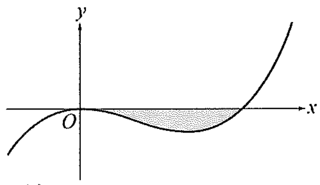
假設 $f'(x)=ax(x-2)$，又 $f'(3)=1 \Rightarrow 3a=1 \Rightarrow a=\dfrac{1}{3}$，

$f'(x)=\dfrac{1}{3}x(x-2)=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{1}{3}x^2+c$，

$f(0)=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{1}{3}x^2=\dfrac{1}{9}x^2(x-3)$，

面積（如下圖灰區）

$=-\int_0^3(\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{1}{3}x^2)\,dx=-\left[\dfrac{1}{36}x^4-\dfrac{1}{9}x^3\right]_0^3=\dfrac{3}{4}$。



11. ＜法一＞

將物化生，先用○○○取代，考慮○○○國英數的排列，

{國英不相鄰}－{國英不相鄰且數物相鄰}。

(Ⅰ){國英不相鄰}

＝{○○○數排列，再將國英插空隙，最後在○○○填入物化生}

$\Rightarrow \dfrac{4!}{3!}\times P_2^5\times 1=80$。

(Ⅱ){國英不相鄰且數物相鄰}（物一定在○○左邊）

＝{$\boxed{\text{物數}}$○○或$\boxed{\text{數物}}$○○，再將國英插空隙，最後填入化生}

$\Rightarrow 2\times P_2^4\times 1=24$。

故方法共有 $80-24=56$。

＜法二＞

(Ⅰ) 數物不相鄰，先排物化∧生∧，

再插入數得 $1\times P_1^2=2$，

再將國英插入 $P_2^5=20$（∧物∧化∧數∧生∧），

得 $2\times 20=40$（種）。

(Ⅱ) 數物相鄰，$\boxed{\text{數物}}$化生

$\Rightarrow 2!=2$。

↑— 數物排列

再選國或英先插入$\boxed{\text{數物}}$之間，得 $C_1^2=2$，

再將剩餘的國或英插入空隙，得 $C_1^4=4$，

（∧$\boxed{\text{數國物}}$∧化∧生∧）$\Rightarrow 2\times 2\times 4=16$。

由(Ⅰ)(Ⅱ)得 $40+16=56$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. $\triangle OCD$ 為等腰三角形（因為 $\overline{OC}=\overline{OD}=1$），

$\angle CDO=\angle DCO=60^\circ-\theta$，

$\angle ADO=120^\circ-\angle CDO=120^\circ-(60^\circ-\theta)=60^\circ+\theta$，

$\angle COD=180^\circ-2(60^\circ-\theta)=60^\circ+2\theta$，

$\angle AOD=180^\circ-2(60^\circ+\theta)=60^\circ-2\theta$，

$\overline{BC}=2\,\overline{CO}\cos\theta=2\cos\theta$，

故選(1)(3)(5)。

13. 等腰梯形的高

$=\overline{CO}\sin\theta+\overline{OD}\sin\angle ADO=\sin\theta+\sin(60^\circ+\theta)$

$=\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta=\dfrac{3}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$\Rightarrow (a,b)=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2})$。（3 分）

14. 上底 $\overline{AD}=2\,\overline{OD}\cos\angle ADO=2\cos(60^\circ+\theta)$，

下底 $\overline{BC}=2\cos\theta$。（1 分）

梯形面積

$=\dfrac{1}{2}[2\cos\theta+2\cos(60^\circ+\theta)]\cdot(\dfrac{3}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)$

$=(\cos\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta)(\dfrac{3}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)$

$=\dfrac{9}{4}\sin\theta\cos\theta+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cos^2\theta-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin^2\theta-\dfrac{3}{4}\sin\theta\cos\theta$

$=\dfrac{3}{4}\sin 2\theta+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta=\dfrac{3}{2}\sin(2\theta+60^\circ)$，

當 $2\theta+60^\circ=90^\circ \Rightarrow \theta=15^\circ$ 時，(2 分)

有最大面積 $\frac{3}{2}$ 。(2 分)

15. P_{n+1} 表示取球 $n+1$ 次，總和為除以 3 餘 1 的機率，
P_n 表示取球 n 次，總和為除以 3 餘 1 的機率。
若 $S_n=3k+1$ (此時機率為 P_n)，
表示第 $n+1$ 次取的數字要為 3。
若 $S_n\neq 3k+1$ (此時機率為 $1-P_n$)，
表示 $S_n=3k$ 或 $S_n=3k+2$，
(Ⅰ) 若 $S_n=3k$，第 $n+1$ 次取的數字要為 1 或 4；(1 分)
(Ⅱ) 若 $S_n=3k+2$，第 $n+1$ 次取的數字要為 2 或 5，
不管是(Ⅰ)或(Ⅱ)，取球的機率都是 $\frac{2}{5}$ 。(1 分)

$P_{n+1}=P_n\times\frac{1}{5}+(1-P_n)\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}P_n$ ，

$(a,b)=(-\frac{1}{5},\frac{2}{5})$ 。(2 分)

16. <法一>
P_1 表示取球 1 次，總和為除以 3 餘 1 的機率，
也就是取到 1 或 4 的機率，故為 $\frac{2}{5}$ 。(1 分)

設 $P_{n+1}-k=-\frac{1}{5}(P_n-k)\Rightarrow P_{n+1}=-\frac{1}{5}P_n+\frac{6}{5}k$

$\Rightarrow \frac{6}{5}k=\frac{2}{5}\Rightarrow k=\frac{1}{3}$ ，(1 分)

$P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{5}(P_n-\frac{1}{3})$ ，

可視為 $\langle P_n-\frac{1}{3}\rangle$ 是公比為 $-\frac{1}{5}$ 的等比數列，首項為 $P_1-\frac{1}{3}$ ，

$P_n-\frac{1}{3}=(P_1-\frac{1}{3})(-\frac{1}{5})^{n-1}$

$\Rightarrow P_n=\frac{1}{3}+(\frac{2}{5}-\frac{1}{3})(-\frac{1}{5})^{n-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}(-\frac{1}{5})^{n-1}$ 。(2 分)

<法二>
累乘法

$$
\begin{array}{rl}
 & P_2-\frac{1}{3}=-\frac{1}{5}(P_1-\frac{1}{3}) \\
 & P_3-\frac{1}{3}=-\frac{1}{5}(P_2-\frac{1}{3}) \\
 & \vdots \\
\times) & P_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{5}(P_{n-1}-\frac{1}{3}) \\
\hline
 & P_n-\frac{1}{3}=(-\frac{1}{5})^{n-1}(P_1-\frac{1}{3})
\end{array}
$$

$\Rightarrow P_n=\frac{1}{3}+(\frac{2}{5}-\frac{1}{3})(-\frac{1}{5})^{n-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}(-\frac{1}{5})^{n-1}$ 。

17. <法一>

$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}(-\frac{1}{5})^{n-1})$ (1 分)

$=\frac{1}{3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{15}(-\frac{1}{5})^{n-1}=\frac{1}{3}$ 。(3 分)

<法二>
假設 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\alpha\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}P_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\alpha$ (1 分)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{5}-\frac{1}{5}P_n=\lim\limits_{n\to\infty}P_n$ (1 分)

$\Rightarrow \frac{2}{5}-\frac{1}{5}\alpha=\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{1}{3}$ 。(2 分)