全國高中 113 年(112 學年度)高三下第五次分科測驗模擬考數學(數甲 A 卷)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 已知 a、b、c 為實數，$f(x)=\sqrt{x}-a$ 與 $g(x)=bx^2$ 的圖形均通過點 $(1,c)$，若 $y=f(x)$ 圖形上以 $(1,c)$ 為切點的切線為 L，$y=g(x)$ 圖形上以 $(1,c)$ 為切點的切線為 M，且 L 與 M 互相垂直，則 $a+2b+3c=$？
(1) -1　(2) -2　(3) -3　(4) -4　(5) -5

答：(3)

解：$f(x)=x^{\frac{1}{2}}-a \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow L$ 斜率 $f'(1)=\frac{1}{2}$

$g(x)=bx^2 \Rightarrow g'(x)=2bx \Rightarrow M$ 斜率 $g'(1)=2b$

$L\perp M \Rightarrow \frac{1}{2}\times 2b=-1 \Rightarrow b=-1$

又 $(1,c)\in g(x)=-x^2 \Rightarrow c=-1$

又 $(1,-1)\in f(x)=\sqrt{x}-a \Rightarrow a=2$

所求 $=2+(-2)+(-3)=-3$

2. 將一個正立方體木塊的六面塗上紅色後，各邊再平分成 n 段（$n\geq 2$），並將此正立方體切割成 n^3 個大小相同的小正立方體。若這 n^3 個小正立方體中，至少一面有塗色的小正立方體有 a_n 個，令 $S=a_2+a_4+\cdots+a_{2k}+\cdots+a_{200}$，則 $\log S$ 最接近下列哪個數值？
(1) 5.5　(2) 6　(3) 6.5　(4) 7　(5) 7.5

答：(4)

解：$a_2=2^3$，$a_4=4^3-2^3$，$a_6=6^3-4^3$，……

$S=\left(2^3\right)+\left(4^3-2^3\right)+\left(6^3-4^3\right)+\cdots+\left(200^3-198^3\right)=200^3$

$\log S=3\log 200=3\times[2.3010]=6.9030$

3. $2\sqrt{1-\sin 8}+\sqrt{2+2\cos 8}$ 的化簡結果為何？
(1) $2\sin 4-4\cos 4$　(2) $2\sin 4-2\sqrt{2}\cos 4$　(3) $4\cos 4-2\sin 4$
(4) $4\cos 4$　(5) $-2\sin 4$

答：(5)

解：所求 $=2\sqrt{(\sin 4-\cos 4)^2}+\sqrt{2+2\left(2\cos^2 4-1\right)}$

$=2\left|\sin 4-\cos 4\right|+2\left|\cos 4\right|$

$=2(\cos 4-\sin 4)+2(-\cos 4)=-2\sin 4$

二、多選題

4. 已知 a 、 b 為實數， $f(x)=x^2+ax+b$ ，試選出正確的選項。
(1) $f(x)$ 必有最小值
(2)當 $a=2$ 時， $f(x)$ 的最小值為 $f(-1)$
(3)當 $a=2$ ， $b=0$ 時， $f(x)$ 在 $0\le x\le 1$ 時的最大值為 3
(4)若 $f(x)$ 在 $0\le x\le 1$ 時的最大值為 3，則 $a=2$
(5)若 $f(x)$ 在 $0\le x\le 1$ 時的最大值為 0，則 $b=0$ 或 $a+b=-1$

答：(1)(2)(3)(5)

解：(1)正確，開口向上
(2)正確，對稱軸 $x=-1$
(3)正確，最大值 $f(1)=1^2+2\times 1+0=3$
(4)反例： $f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\xrightarrow{0\le x\le 1}$ 最大值 $f(0)=3$
(5)正確，$\begin{cases}\text{最大值 } f(0)=b=0\\ \text{或最大值 } f(1)=1+a+b=0\end{cases}$

5. 設 x 、 y 、 z 均為非零實數， a 、 b 、 c 均為不等於 1 的正實數，且 $a^x=b^y=c^z$ ，試選出正確的選項。
(1)若 $a=2$ 、 $b=4$ 、 $c=8$ ，則 $x:y:z=3:2:1$
(2)若 $ab=1$ ，則 $y=-x$
(3)若 $a>b>c$ ，則 $x<y<z$
(4)若 $ab=c$ ，則 $x+y=z$
(5)若 $abc=1$ ，則 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 之值為 0

答：(2)(5)

解：(1) $2^x=4^y=8^z \Rightarrow x=2y=3z \Rightarrow x:y:z=6:3:2$
(2) $a^x=\left(\frac{1}{a}\right)^y=a^{-y} \Rightarrow x=-y$
(3)當 $1>a>b>c>0$ 時， $x>y>z$
(4) $a^x=b^y=c^z=t \Rightarrow a=t^{\frac{1}{x}}$ ， $b=t^{\frac{1}{y}}$ ， $c=t^{\frac{1}{z}} \xrightarrow{ab=c} t^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}$
$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$
(5)承(4) $\xrightarrow{abc=1} t^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=1=t^0 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

6. 若 S 為 $(1,1)$ 、 $(-1,1)$ 、 $(-1,-1)$ 、 $(1,-1)$ 四頂點所形成的正方形邊界，經矩陣 A 線性變換後為 S' ，試選出正確的選項。
(1)當 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 時， S 和 S' 不相交
(2)當 $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ 時， S 和 S' 不相交

(3)當 $A=\begin{bmatrix}\cos 27^\circ & -\sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ\end{bmatrix}$ 時，S 和 S' 重合

(4)當 $A=\begin{bmatrix}\cos 270^\circ & \sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & -\cos 270^\circ\end{bmatrix}$，$S$ 內部和 S' 內部重疊的面積小於 3

(5)當 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 時，S 內部和 S' 內部重疊的面積為 2

答：(2)(3)(5)

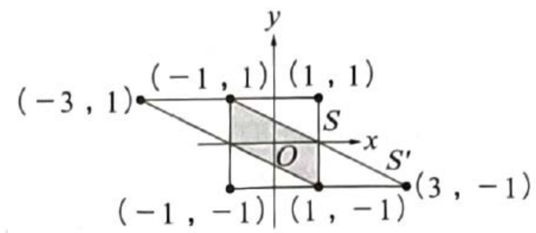
解：(1) A 為鏡射矩陣，關於 x 軸成對稱，故 S 與 S' 重合

(2) A 為伸縮矩陣，故 S 與 S' 無交點

(3) A 為旋轉矩陣，逆時針旋轉 270°，故 S 與 S' 重合

(4) A 為鏡射矩陣，關於 $y=-x$ 成對稱，故 S 與 S' 重合，面積 $=4$

(5) A 為推移矩陣，重疊部分面積 $=2$（畫圖即知）



7. 坐標平面上有一正方形 $ABCD$，其 $A(2,2)$、$B(2,6)$、$C(-2,6)$、$D(-2,2)$，若 $f(x)=x^3-3ax+4$，其中 a 為實數，試選出正確的選項。

(1)當 $f(x)$ 有極值時，$a>0$

(2)若 $a>0$，則 $f(x)$ 在 $x=\sqrt{a}$ 時有極大值

(3)當 $a=2$ 時，$y=f(x)$ 的圖形和正方形 $ABCD$ 的邊交於兩點

(4)若 $y=f(x)$ 的圖形和正方形 $ABCD$ 的邊相切，則 $a=1$

(5) $y=f(x)$ 的圖形和正方形 $ABCD$ 的邊可能交於奇數個點

答：(1)(3)(4)

解：(1) $f'(x)=3x^2-3a$ 之判別式：$0^2-4\times 3\times(-3a)>0 \Rightarrow a>0$

(2)承(1)，$x=-\sqrt{a}$ 有極大值，$x=\sqrt{a}$ 有極小值

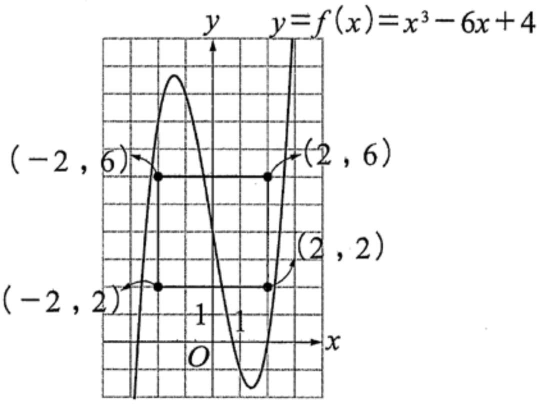
(3)當 $a=2$ 時，$f(x)=x^3-6x+4$，

在 $x=\sqrt{2}$ 時，有極小值 $4-2\times 2\times\sqrt{2}<4-2=2$

在 $x=-\sqrt{2}$ 時，有極大值 $4+2\times 2\times\sqrt{2}>4+2=6$

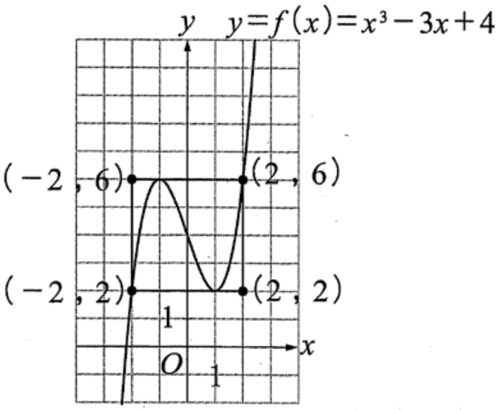
又 $f(-2)=-8+12+4=8>6$，$f(2)=8-12+4=0<2$

因此 $y=f(x)$ 的圖形和正方形 $ABCD$ 的邊交於兩點



(4)當 $y=f(x)$ 的圖形和正方形 $ABCD$ 的邊相切，即極大值為 6，極小值為 2

可得 $4+2a\sqrt{a}=6 \Rightarrow a=1$



(5)由 $y=f(x)$ 圖形的對稱中心和正方形 $ABCD$ 的對稱中心均為 $(0,4)$

因此兩個圖形的交點必兩兩對稱於 $(0,4)$

$\therefore y=f(x)$ 的圖形和正方形 $ABCD$ 的邊必交於偶數個點

8. 已知坐標平面上一個圓與兩軸均有相交，此圓被 x 軸截成兩段弧長比為 $1:3$ 的圓弧，且圓截 x 軸所得之弦長為 2，又圓心 $O'(a,b)$ 到直線 $x-2y=0$ 的距離為 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，試選出正確的選項。

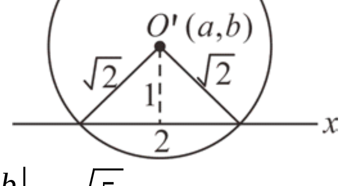
(1)圓心到 x 軸的距離為半徑的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍　　(2) $|a-2b|=1$

(3)圓的半徑為 $\sqrt{2}$　　(4)圓心在直線 $y=x$ 上

(5)滿足條件的圓有兩個

答：(1)(2)(3)(4)(5)

解：(1)(3)



(2) $\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow |a-2b|=1$

(4)(5) $\because |b|=1 \Rightarrow (a,b)=(3,1)$，$(1,1)$ 或 $(-3,-1)$，$(-1,-1)$

又圓與兩軸都有交點 $\Rightarrow (a,b)=(1,1)$，$(-1,-1)$

$\Rightarrow$圓：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

三、選填題

9. 印有 1、3、5、7、9 的五張卡片，其中 9 可當作 6 使用，則從中抽出三張卡片，可以排成________個不同的三位數。

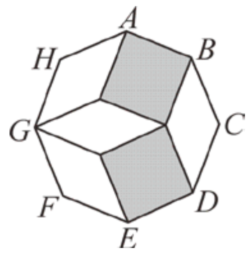
答： 96

解： 無 9 $\Rightarrow C_3^4\times 3!=24$

有 9 $\Rightarrow C_1^1C_2^4\times 3!\times 2=72$

合計 96 種

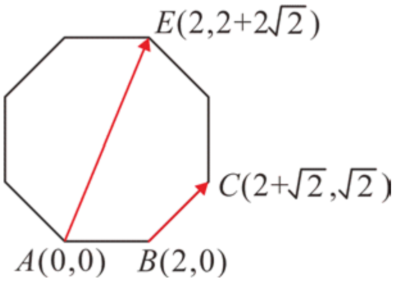
10. 如右圖所示，由兩個全等的灰色正方形及四個全等的平行四邊形不重疊且無空隙拼成一個正八邊形。若正方形的邊長為 2，則 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值為________。（化為最簡根式）



答： $4+4\sqrt{2}$

解： 所求 $=\left(2,2+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

$=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4=4+4\sqrt{2}$



11. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}\left[\left(\dfrac{2}{n}\right)^4+\left(\dfrac{12}{n}\right)^4+\left(\dfrac{22}{n}\right)^4+\cdots\cdots+\left(\dfrac{10k-8}{n}\right)^4+\cdots\cdots+\left(\dfrac{10n-8}{n}\right)^4\right]$ 之值為________。

答： 4000 此題佳

解： 所求 $=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{10k}{n}-\dfrac{8}{n}\right)^4\times\dfrac{10}{n}$

$=\dfrac{1}{5}\int_0^{10}x^4\,dx=\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{1}{5}x^5\right]\Bigg|_0^{10}=4000$

第貳部分：混合題或非選擇題

12-15 題為題組

空間中有四個平面：E_1：$x+y+z=0$、E_2：$x+y+z=3$、E_3：$x+y+z=9$及E_4：$x+y-z=0$，若E_4上有一正三角形ABC，而A、B、C也分別在E_1、E_2、E_3上，此正三角形與E_2的截痕為$\overline{BD}$，試回答下列問題。

12. E_1和E_2的距離為何？

答：$\sqrt{3}$

解：$d\left(E_1,E_2\right)=\dfrac{|3-0|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

13.若$\overline{AD}=a$，則$\overline{BD}$長為何？（單選題） (1)$\sqrt{3}a$　　(2)$2a$　　(3)$\sqrt{5}a$　　(4)$\sqrt{6}a$　　(5)$\sqrt{7}a$

答：(5)　此題佳

解：$\overline{AD}:\overline{CD}=d\left(E_1,E_2\right):d\left(E_3,E_2\right)=\dfrac{3}{\sqrt{3}}:\dfrac{6}{\sqrt{3}}=1:2$

$\xrightarrow{\overline{AD}=a}\overline{CD}=2a$，$\overline{AB}=3a$，$\overline{BD}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{AB}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{AB}\cos 60^\circ}=\sqrt{7}a$

14.若E_2和E_4的銳夾角為θ，則$\cos\theta$之值為何？

答：$\dfrac{1}{3}$

解：$\cos\theta=\left|\dfrac{(1,1,1)\cdot(1,1,-1)}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\right|=\dfrac{1}{3}$

15.試求A到$\overleftrightarrow{BD}$的距離及正三角形ABC之邊長。

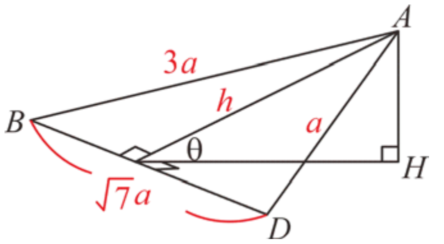
答：$d\left(A,\overleftrightarrow{BD}\right)=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$；$\Delta ABC$邊長$=\dfrac{3\sqrt{14}}{2}$此題佳

解：$\dfrac{1}{2}\times 3a\times a\times\sin 60^\circ=\sqrt{7}a\times h\times\dfrac{1}{2}\Rightarrow h=\dfrac{3\sqrt{3}a}{2\sqrt{7}}$

$h\sin\theta=\overline{AH}\Rightarrow\dfrac{3\sqrt{3}a}{2\sqrt{7}}\times\dfrac{\sqrt{8}}{3}=\sqrt{3}\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

故$d\left(A,\overleftrightarrow{BD}\right)=h=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$

故ΔABC邊長$3a=\dfrac{3\sqrt{14}}{2}$



<u>16-18 題為題組</u>

設 n 是大於 1 的正整數，$|a|>1$，已知 $f(1)=0$ 且 $af(n)-f(n-1)=1$，試回答下列問題。

16.試以 a 表示 $f(3)$與 $f(4)$之值。

答： $f(3)=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}$ ， $f(4)=\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}$

解： $f(n)=\dfrac{1}{a}[f(n-1)+1]$， $f(1)=0$

$\Rightarrow f(2)=\dfrac{1}{a}$ ， $f(3)=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}$ ， $f(4)=\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}$

17.試以 n 與 a 表示 $f(n)(n>1)$，並證明之。

答： $f(n)=\dfrac{1}{a^{n-1}}+\dfrac{1}{a^{n-2}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}$

證： 數學歸納法

18.試以 a 表示 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$。

答： $\dfrac{1}{a-1}$

解： $\because |a|>1$ $\quad \therefore \left|\dfrac{1}{a}\right|<1$ $\quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\dfrac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}=\dfrac{1}{a-1}$