

全國高中 113 年(112 學年度)高三下第五次 分科測驗模擬考數學(數甲卷 I)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 比較四個實數 $a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ ， $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ ， $c = 5^{\frac{1}{2}}$ ， $d = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ 的大小。

試選出正確的選項。

- (1) $a > b > c > d$ (2) $c > b > a > d$ (3) $a > c > b > d$
(4) $b > a > c > d$ (5) $b > c > d > a$

答：(2)

解： $c > 2 > b > 1 > a > \frac{1}{2} > d$

2. 設 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為兩個不平行的非零向量，且 $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ ，則 $\vec{c}$ 與下列何者平行？

- (1) $\frac{3}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$ (2) $\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$ (3) $\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{7}{5}\vec{b}$ (4) $\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ (5) $\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

答：(5)

解： $\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} // 3\left(\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

3. 設 $A(2,1)$ ， $B(4,5)$ ， $C(6,3)$ ， $D(1,-7)$ ， $E(3,-3)$ 及 $F(9,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 與 $\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ 共有三個交點，則 L 的斜率 m 之可能的最大範圍為何？

- (1) $2 < m < 8$ (2) $-3 < m < -1$ (3) $m > 8$ 或 $m < -1$
(4) $m > 2$ 或 $m < -1$ (5) $m \in R$

答：(4)

解：(I) L 恰與 $\triangle DEF$ 交於 D ： $\begin{cases} m_{\overline{DA}} = 8 \\ m_{\overline{DC}} = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 < m < 8$

(II) L 恰與 $\triangle DEF$ 交於 E ：不合

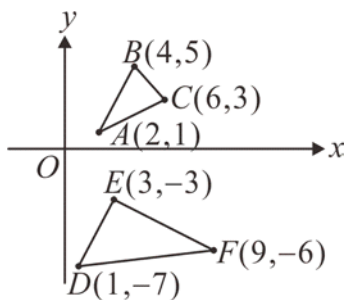
(III) L 恰與 $\triangle DEF$ 交於 F ： $\begin{cases} m_{\overline{FC}} = -3 \\ m_{\overline{FA}} = -1 \end{cases} \Rightarrow -3 < m < -1$

(IV) L 恰與 $\triangle ABC$ 交於 A ： $\begin{cases} m_{\overline{CA}} = 8 \\ m_{\overline{AF}} = -1 \end{cases} \Rightarrow m > 8 \text{ 或 } m < -1$

(V) L 恰與 $\triangle ABC$ 交於 B ：不合

(VI) L 恰與 $\triangle ABC$ 交於 C ： $\begin{cases} m_{\overline{CD}} = 2 \\ m_{\overline{CF}} = -3 \end{cases} \Rightarrow m > 2 \text{ 或 } m < -3$

所求 $m > 2$ 或 $m < -1$



故選(4)

二、多選題

4. 設函數 $y = f(x) = -\cos x - \frac{3}{2\cos x}$ ， x 為任意實數，但 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， k 為任意整數，試選出正確的選項。
- (1) $y = f(x)$ 為一個奇函數 (2) 若 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ 時， $y = f(x)$ 有最小值 $\sqrt{6}$
- (3) $y = f(x)$ 無最大值 (4) $y = f(x)$ 函數圖形與 x 軸不相交
- (5) 直線 $x = k\pi$ (k 為任意整數) 皆為 $y = f(x)$ 函數圖形的對稱軸

答：(3)(4)(5)

解：(1) 應為偶函數

$$(2) f(x) = (-\cos x) + \left(\frac{-1}{\cos x}\right) + \left(\frac{-1}{2\cos x}\right) \geq 2\sqrt{(-\cos x)\left(\frac{-1}{\cos x}\right)} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

等號成立於 $\cos x = -1$

(3)(4) 承(2)，正確

(5) 當 $x = k\pi \Rightarrow \cos x = \pm 1$ ，正確

5. 若二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的行列式值不為 0，試選出正確的選項。

(1) 在坐標平面上任意三角形經過二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的線性變換下，仍為三角形

(2) 在坐標平面上任意三角形經過水平伸縮為原來的 5 倍且鉛直伸縮為原來的 $\frac{1}{5}$ 倍的變換下，所得的三角形面積不變

(3) 在坐標平面上任意直線經過二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的線性變換下，仍為直線

(4) 在坐標平面上任意圓方程式經過二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的線性變換下，仍為圓方程式

(5) 在坐標平面上， $y = \cos x$ 的圖形在水平伸縮為原來的 3 倍且鉛直伸縮為原來的 3 倍的變換下，可得到 $y = 3\cos 3x$ 的圖形

答：(1)(2)(3)

解：(4) 可能為橢圓 (5) 應為 $y = 3\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

6. 某工廠生產的 20 個相同產品中有 4 個不良品，品管員從其中每次任取一個，逐一加以檢查，每次每個產品被取出的機會均相等，試選出正確的選項。

(1)取出的產品不再放回，第三次取到不良品的機率為 $\frac{1}{5}$

(2)取出的產品再放回，第三次取到不良品的機率為 $\frac{1}{5}$

(3)取出的產品不再放回，在第五次取出第三個不良品的機率為 $\frac{6}{323}$

(4)取出的產品再放回，在第五次取出第三個不良品的機率為 $\frac{96}{3125}$

(5)取出的產品不再放回，已知品管員前 3 次恰取出一個不良品的情形下，他第五次取出不良品的機率為 $\frac{4}{17}$

答：(1)(2)(3)(4)

解：(1)(2)正確

$$(3) \frac{16}{20} \times \frac{15}{19} \times \frac{4}{18} \times \frac{3}{17} \times \frac{2}{16} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{6}{323}$$

$$(4) \left(\frac{16}{20}\right)^2 \times \left(\frac{4}{20}\right)^3 \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{96}{3125}$$

$$(5) \frac{\left(\frac{16}{20} \times \frac{15}{19} \times \frac{4}{18}\right) \times \frac{3!}{2!1!} \times \left(\frac{14}{17} \times \frac{3}{16} + \frac{3}{17} \times \frac{2}{16}\right)}{\left(\frac{16}{20} \times \frac{15}{19} \times \frac{4}{18}\right) \times \frac{3!}{2!1!}} = \frac{3}{17}$$

7. 已知二組數據 $(X, Y) : (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ， X 與 Y 的相關係數為 $r_{(X, Y)} = 0.6$ ，標準差分別為 $\sigma_X = 3$ ， $\sigma_Y = 1$ ，平均數分別為 μ_X ， μ_Y 。若 X 與 Y 的迴歸直線通過原點，下列何者正確？

(1) $r_{(Y, X)} = -0.6$ (2) $r_{\left(\frac{1}{2}X+3, Y+1\right)} = 0.3$ (3) $r_{(-2Y+1, 3X+2)} = -0.6$

(4) $\mu_X = 5\mu_Y$ (5) $\mu_X > \mu_Y$

答：(3)(4)

解：(1) $r_{(Y, X)} = r_{(X, Y)} = 0.6$

$$(2) r_{\left(\frac{1}{2}X+3, Y+1\right)} = r_{(X, Y)} = 0.6$$

$$(3) r_{(-2Y+1, 3X+2)} = r_{(-Y, X)} = -r_{(X, Y)} = -0.6$$

$$(4) \text{迴歸直線：} (y - \mu_Y) = \left(r_{(X, Y)} \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \right) (x - \mu_X), \text{ 過 } (0, 0)$$

$$\Rightarrow -\mu_Y = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} (-\mu_X) \Rightarrow 5\mu_Y = \mu_X$$

(5)無法確定 μ_X ， μ_Y 之正負

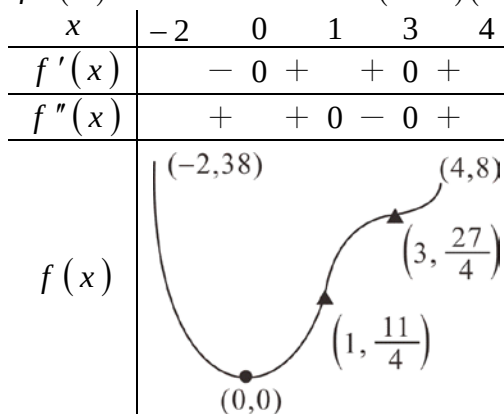
8. 設函數 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2$ ， $-2 < x < 4$ ，即函數 $f(x)$ 的定義域為開區間 $(-2, 4)$ ，試選出正確的選項。

- (1) $f(x)$ 在開區間 $(0, 4)$ 上為嚴格遞增函數
- (2) $f(x)$ 在定義域上的最小值為 0，最大值為 38
- (3) $f(x)$ 在定義域上，只在開區間 $(1, 3)$ 上的圖形為凹向下
- (4) $f(3) = \frac{27}{4}$ 為 $f(x)$ 的一個極小值
- (5) $\left(1, \frac{11}{4}\right)$ 為 $f(x)$ 的一個反曲點

答：(1)(2)(3)(5)

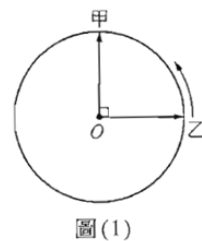
解： $f'(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$

$$f''(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$



三、選填題

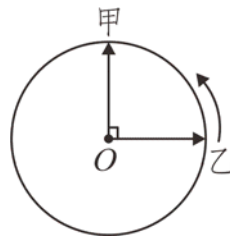
9. 如圖，甲乙兩人在圓形體育館內的中心點 O 同時出發，且兩人一直保持等速率移動，甲朝正北方的出口直線前行，出了體育館仍然保持直線前進；乙朝正東方的出口直線前行，並一出體育館立即沿著體育館圓周逆時針方向繞了 $\frac{1}{6}$ 圈時，正好甲乙兩人在體育館外第一次可以互視，則甲乙兩人的速率比 $v_{\text{甲}}:v_{\text{乙}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式)



圖(1)

答： $2\sqrt{3}:(3+\pi)$

解： $v_{\text{甲}}:v_{\text{乙}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}:\left(r+r\times\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}:(3+\pi)$



10. 阿慶就讀的高中設有 8 位同學組成的糾察隊，負責每天早上及中午的值勤。每天早上需有 5 位同學，其中 3 位擔任門口守衛，另 2 位擔任教室巡視；中午也是需有 5 位同學，其中 3 位擔任門口守衛，另 2 位擔任教室巡視。學校要求每天早上及中午的門口守衛不可以由同一人擔任，同時每天早上及中午的教室巡視也不可以由同一人擔任，則該校糾察隊每天值勤工作的安排共有 種方法。

答： 38640

早上 門口 ABC

解： $\frac{\text{巡視 } DE}{\text{中午 門口 } \underline{DEF} \quad \underline{DFG} \quad FGH}$
巡視

$$\begin{aligned}\text{所求} &= C_3^8 \times C_2^5 \times \left(C_2^2 \times C_1^3 \times C_2^5 + C_1^2 \times C_2^3 \times C_2^4 + C_3^3 \times C_2^3 \right) \\ &= 38640\end{aligned}$$

11. 設 a, b 為實數且 $a < b$ ，若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + bx + 3a}{x - a} = 8$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $(a, b) = (0, 8)$

解： $\left. \begin{array}{l} \text{分子 } a^2 + ab + 3a = 0 \\ \text{羅必達： } \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x + b}{1} = 2a + b = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 11 \\ b = -14 \end{cases} \text{ (不合)}$

第貳部分：混合題或非選擇題

12-14 題為題組

設四平面方程式如下： $E_1: 3x + 5y - z + 1 = 0$ ， $E_2: x - y + 4z - 11 = 0$ ，

$E_3: x + 7y + az + 23 = 0$ ， $E_4: bx + 20y - 23z + 58 = 0$ ，試回答下列問題。

12. 求聯立方程式 $\begin{cases} 3x + 5y - z + 1 = 0 \\ x + 7y + az + 23 = 0 \end{cases}$ 的解所代表的圖形為何？(單選題)

(1)一點 (2)一平面 (3)一直線 (4)二平面 (5)沒有圖形

答： (3)

解： 相異兩平面交於一線

13. 令 $x = t$ ，求聯立方程式 $\begin{cases} 3x + 5y - z + 1 = 0 \\ x - y + 4z - 11 = 0 \end{cases}$ 的解。(以直線參數式表示)

答： $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{7}{19} - \frac{13}{19}t \\ z = \frac{54}{19} - \frac{18}{19}t \end{cases}, t \in R$

解： $\begin{cases} x = t \\ 5y - z = -1 - 3t \\ -y + 4z = 11 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{7}{19} - \frac{13}{19}t \\ z = \frac{54}{19} - \frac{18}{19}t \end{cases}, t \in R$

14. 若已知此四平面互異且其中 E_1, E_2, E_3 平面交線 L ，而交線 L 與 E_4 平面恰交於一點，則實數 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， b 值之最大可能範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $a = -9$ 且 $b \in R$ 但 $b \neq 4$

解： $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = -9$

$\Delta' = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 6 & 20 & -23 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow b \neq 4, b \in R$

15-17 題為題組

坐標平面上，以 Γ_1 表示 $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ 的圖形，以 Γ_2 表示 $y = g(x) = 2x^2 - 4x$ 的圖形。根據上述，試回答下列問題。

15. 求出 Γ_1 與 Γ_2 兩圖形所有的交點坐標。

答： $(0, 0), (2, 0), (4, 16)$

解： $\begin{cases} y = x^3 - 4x^2 + 4x \\ y = 2x^2 - 4x \end{cases} \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x = 0, 2, 4$

16. 設 Γ_1 與 Γ_2 兩圖形在 $0 \leq x \leq 2$ 的範圍下所圍成的有界區域面積為 A ，試求 A 的值。

答： 4

解： $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right] \Big|_0^2 = 4$

17. 承 16，若直線 $y = k$ 將面積 A 二等分，則實數 k 的值為何？

答： $k = \frac{\sqrt[3]{36}}{2} - 2$

解： $\begin{cases} y = k \\ y = 2x^2 - 4x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 4x - k = 0$ 有二根 α, β

$\Rightarrow \beta - \alpha = \sqrt{(\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{4 + 2k}$

$\int_{\alpha}^{\beta} (-2x^2 + 4x + k) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + kx \right] \Big|_{\alpha}^{\beta} = 2$

$\Rightarrow -\frac{2}{3}(\beta - \alpha)(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) + 2(\beta - \alpha)(\beta + \alpha) + k(\beta - \alpha) = 2$

$\Rightarrow (\beta - \alpha) \left[-\frac{2}{3} \left(2^2 + \frac{k}{2} \right) + 2(2) + k \right] = 2$

$\Rightarrow k = \frac{\sqrt[3]{36}}{2} - 2$