數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(3)	(5)	(1)	(2)(4)	(1)(4)(5)	(1)(4)	(2)(5)
8.						
(1)(3)(5)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (3)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：了解標準差意義與計算

解析：此情況為平均數 $\dfrac{100+40}{2}=70$，且其餘八科成績皆等於平均數(數據最集中)

則標準差最小值為

$$\sqrt{\frac{(100-70)^2+(40-70)^2}{10}}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}\approx 13.416$$

故選(3)。

2. (5)

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

目標：了解旋轉體體積算法與含意

解析：(1) $\displaystyle\int_1^2 \pi(x^2)^2\,dx=\left(\frac{\pi}{5}x^5\right)\Big|_1^2=\frac{31}{5}\pi$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \pi(-x^2+4)^2dx=\int_1^2 \pi(x^4-8x^2+16)\,dx$

$\displaystyle=\pi\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{8}{3}x^3+16x\right)\Big|_1^2$

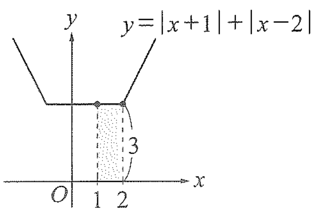
$\displaystyle=\frac{53}{15}\pi$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \pi(x^3-x)^2dx=\int_1^2 \pi(x^6-2x^4+x^2)\,dx$

$\displaystyle=\pi\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2$

$\displaystyle=\frac{848}{105}\pi$

(4) $y=|x+1|+|x-2|$ 在 $[1,2]$ 和 x 軸所圍區域為長方形，如下圖



則旋轉體體積為 $\pi\displaystyle\int_1^2 3^2\,dx=9\pi$

(5) $\displaystyle\int_1^2 \pi(\sqrt{12-x^2})^2dx=\pi\left(12x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2=\frac{29}{3}\pi>9\pi$

故選(5)。

3. (1)

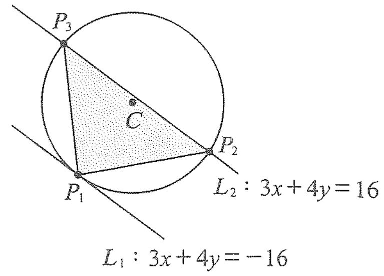
出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈平面向量〉

目標：了解內積運算，並會利用點到直線距離判斷直線與圓的關係

解析：設 $P(x,y)$，則 $|(3,4)\cdot(x,y)|=16\Rightarrow 3x+4y=\pm 16$

圓 $(x+2)^2+(y-5)^2=36$ 的圓心 $C(-2,5)$，半徑為 6

如下圖，所求多邊形為$\triangle P_1P_2P_3$



$\because d(L_1,L_2)=\dfrac{32}{5}$，$d(C,L_1)=6$，$d(C,L_2)=\dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow \overline{P_2P_3}=2\times\sqrt{6^2-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{16}{5}\sqrt{14}$

$\triangle P_1P_2P_3$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{5}\sqrt{14}\times\dfrac{32}{5}=\dfrac{256}{25}\sqrt{14}$

故選(1)。

二、多選題

4. (2)(4)

出處：選修數學甲(上)〈微分〉、選修數學甲(上)〈積分〉

目標：了解微分函數特徵及積分算法

解析：$\because f(x)$ 為可微分函數　$\therefore f(x)$ 亦為連續函數

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 皆可微分且連續

$\therefore f(1)=a+1=1+b$

$f(2)=4+b=-8+4c+d$

$f'(1)=a=2$

$f'(2)=4=-12+4c$

故 $a=b=2$，$c=4$，$d=-2$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 1\\ x^2+2, & 1<x<2\\ -x^3+4x^2-2, & x\ge 2\end{cases}$$

(1) ╳：$f'(1)=2$

(2) ○：$f'(2)=4$

(3) ╳：$a+b+c+d=6$

(4) ○：$f(x)$ 圖形在 $x=1$ 的切線斜率為 $f'(1)=2$，過點 $(1,3)$

因此切線方程式為 $y=2x+1$

(5) ╳：$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(2x+1)dx+\int_1^2(x^2+2)dx$

$\displaystyle=(x^2+x)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{3}x^3+2x\right)\Big|_1^2=\frac{19}{3}$

故選(2)(4)。

5. (1)(4)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉、選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：了解多項式函數的除法原理及微分定義

解析：(1) ○：$f(x)=Q(x)\,g(x)+(3x-2)$，

則 $f(0)=-2$，$f(4)=10$

藉由勘根定理，可知存在實數 c 落在 $(0,4)$，且滿足 $f(c)=0$

(2) ╳：設餘式為 $ax+b$，

則 $(x+5)f(x)=H(x)\,g(x)+(ax+b)$

將 $x=0$、$x=4$ 代入，

可得 $5\times f(0)=-10=b$、$9\times f(4)=90=4a+b$，

解出 $a=25$，$b=-10$

可得餘式為 $25x-10$

(3) ╳：設餘式為 $cx+d$，則 $[f(x)]^2=P(x)g(x)+(cx+d)$

將 $x=0$、$x=4$ 代入，

可得 $[f(0)]^2=4=d$、$[f(4)]^2=100=4c+d$

解出 $c=24$，$d=4$，可得餘式為 $24x+4$

(4) ○：$f(x)=K(x)[(x-7)g(x)]+r(x)$

因為 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $3x-2$，故 $r(x)$ 可表為 $q(x)g(x)+(3x-2)$，亦即 $r(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式即為 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式 $3x-2$

(5) ○：由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+2x}{x^2}=-3$ 可知 $f(x)$ 為二次函數，首項係數為 -3

且 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式 $Q(x)=-3$

$\therefore f(x)=-3g(x)+(3x-2)$

則 $f(5)=(-3)\times5+13=-2$

故選(1)(4)(5)。

6. (1)(4)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈平面向量〉

目標：了解點與圓和直線與圓的關係

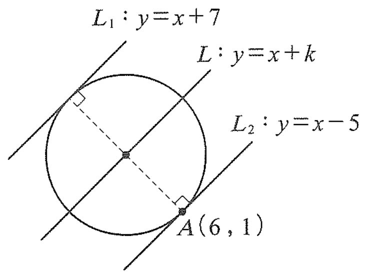
解析：(1) ○：兩條切線互相平行，

可知半徑為

$\dfrac{1}{2}\times d(L_1, L_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{|7-(-5)|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，

則圓 C 面積為 $\pi(3\sqrt{2})^2=18\pi$

(2) ╳：設圓心 Q 落在直線 L：$y=x+k$ 上



則 $d(L, L_1)=d(L, L_2)\Rightarrow\dfrac{|7-k|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|k+5|}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow k=1$

可知圓心 Q 落在直線 $y=x+1$ 上

令圓心 Q 坐標為 $(t, t+1)$

則 $\overline{QA}=3\sqrt{2}=\sqrt{(t-6)^2+t^2}$，可得 $t=3$

故圓心 $Q(3, 4)$，代入 $x+2y-1$ 得 $3+8-1\neq0$

$\therefore$ 圓心不在直線 $x+2y-1=0$ 上

(3) ╳：設兩直線夾角為 θ，又直線 L_1 與直線 $x+2y-1=0$ 的法向量分別為 $(1,-1)$、$(1,2)$

$\cos\theta=\dfrac{(1,-1)\cdot(1,2)}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{-1}{\sqrt{10}}$

$>\dfrac{-1}{2}=\cos120^\circ$

所以當 θ 為鈍夾角時，$90^\circ<\theta<120^\circ$

(4) ○：圓心 Q 到直線 $x+2y-1=0$ 的距離為

$\dfrac{|3+8-1|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}>3\sqrt{2}$，

所以該直線與圓 C 無交點

亦即圓 C 上的點皆落在直線 $x+2y-1=0$ 的同一側

(5) ╳：圓心 Q 到原點 $(0, 0)$ 的距離為 5

令點 P 到原點 $(0, 0)$ 的距離為正整數 r，則

$5-3\sqrt{2}<r<5+3\sqrt{2}\Rightarrow r=1, 2, \cdots\cdots, 9$

則點 P 共有 $9\times2=18$ 種可能

故選(1)(4)。

7. (2)(5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈機率〉

目標：了解排列組合原理及機率

解析：(1) ╳：只取一球時所得獎金期望值為

$1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{1}{5}+3\times\dfrac{1}{5}+4\times\dfrac{1}{5}+5\times\dfrac{1}{5}=3$

$\therefore$ 取三球的獎金期望值為 $3\times3=9$ (元)

(2) ○：等差數列有 111、222、……、555 以及 123、234、345、135、321、432、543、531

所求機率為 $\dfrac{3!\times5+3\times3\times3\times8}{15\times14\times13}=\dfrac{41}{455}$

(3) ╳：所求機率為 $\dfrac{13\times3!}{15\times14\times13}=\dfrac{1}{35}$

(4) ╳：所求機率為 $\dfrac{13\times3!}{5\times5\times5\times3!}=\dfrac{13}{125}$

(5) ○：一次取出 3 球，若編號和為偶數，則剩餘 12 顆球編號和必為奇數

$\therefore K_3$ 即為一次取出 12 球編號和為奇數的情形

所以 $K_3+K_{12}=C^{15}_{12}=455$

故選(2)(5)。

8. (1)(3)(5)

出處：第三冊〈三角函數〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：了解指對數運算性質與圖形走向，以及三角函數值的大小

解析：(1) ○：$\because b^3<b^2$　$\therefore 0<b<1$

又 $a^2<b^2\Rightarrow a<b$

故 $0<a<b<1$

(2) ╳：$\because -a>-b$

$\therefore 2^{-a}>2^{-b}$

(3) ○：$\because a^{\log_a b}=b<1$，$b^{\log a}>b^{\log 1}=b^0=1$

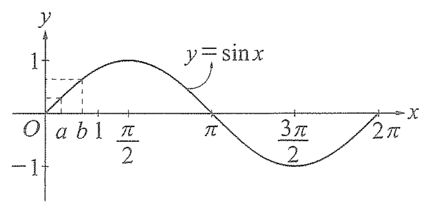
$\therefore a^{\log_a b}<b^{\log a}$

(4) ╳：$\because \log(a+1)^b=b\log(a+1)>b\log1=0$

又 $\log a^{b+1}=(b+1)\log a<(b+1)\log1=0$

$\therefore \log(a+1)^b>\log a^{b+1}$

(5) ○：$\sin(\pi+a)=-\sin a$，$\sin(\pi+b)=-\sin b$



$\because \sin a<\sin b$

$\therefore \sin(\pi+a)>\sin(\pi+b)$

故選(1)(3)(5)。

三、選填題

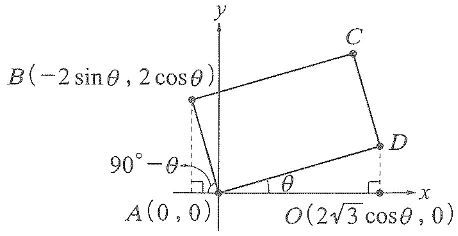
9. 10

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：利用二倍角、半角公式及正餘弦函數疊合求值

解析：設$\angle DAO=\theta$

建立平面坐標系，令$A(0,0)$，如下圖



得$O(2\sqrt{3}\cos\theta,0)$，$B(-2\sin\theta,2\cos\theta)$，

其中$0^\circ<\theta<90^\circ$

$$\Rightarrow \overline{OB}=\sqrt{(2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta)^2+(0-2\cos\theta)^2}$$

$$=\sqrt{12\cos^2\theta+8\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+4}$$

$$=\sqrt{12\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)+4\sqrt{3}\sin2\theta+4}$$

$$=\sqrt{6\cos2\theta+4\sqrt{3}\sin2\theta+10}$$

$$=\sqrt{\sqrt{84}\sin(2\theta+\alpha)+10}$$

其中$\cos\alpha=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{84}}$，$\sin\alpha=\dfrac{6}{\sqrt{84}}$

當$2\theta+\alpha=90^\circ$時，$\overline{OB}$有最大值

$\sqrt{10+\sqrt{84}}=\sqrt{10+2\sqrt{21}}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$

$\therefore a+b=10$。

10. $\dfrac{11}{3}$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：了解空間向量運算性質及正射影意涵

解析：$\because x\overrightarrow{b}+y\overrightarrow{c}$為$\overrightarrow{a}$在$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$所張成平面上的正射影

$\therefore(\overrightarrow{a}-x\overrightarrow{b}-y\overrightarrow{c})\,/\!/\,(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})$

$\because \overrightarrow{a}-x\overrightarrow{b}-y\overrightarrow{c}$

$=(4-2x-3y,1-3x-7y,3-x+y)$

又$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}=(-10,5,5)\,/\!/\,(-2,1,1)$

$$\therefore\frac{4-2x-3y}{-2}=\frac{1-3x-7y}{1}=\frac{3-x+y}{1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x+8y=-2\\4x+y=10\end{cases}\Rightarrow(x,y)=\left(\frac{41}{15},-\frac{14}{15}\right)$$

故$x-y=\dfrac{11}{3}$。

11. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\dfrac{3}{2}$

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

目標：了解黎曼和表示法與積分轉換

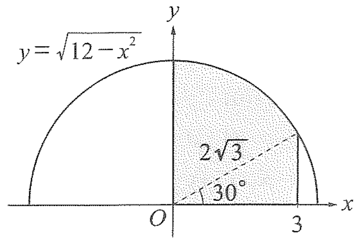
解析：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}\left[\sqrt{4n^2-(3\times1^2)}+\sqrt{4n^2-(3\times2^2)}+\cdots\cdots+\sqrt{4n^2-(3\times n^2)}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{n}\left[\sqrt{12-\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\sqrt{12-\left(\frac{6}{n}\right)^2}+\cdots\cdots+\sqrt{12-\left(\frac{3n}{n}\right)^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\frac{3}{n}\left[\sqrt{12-\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\sqrt{12-\left(\frac{6}{n}\right)^2}+\cdots\cdots+\sqrt{12-\left(\frac{3n}{n}\right)^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^3\sqrt{12-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{6}\times(2\sqrt{3})^2\times\pi+\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}\right]=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{2}$$。



第貳部分、混合題或非選擇題

12. -1和2

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

目標：了解兩函數圖形的交點求法

解析：$x^3-2=2x^3-3x-4$

$\Rightarrow x^3-3x-2=0\Rightarrow(x-2)(x+1)^2=0$

$\Rightarrow x=-1$，2

故兩函數圖形交點的x坐標為-1和2。

13. $\dfrac{27}{4}$平方單位

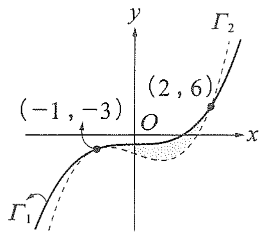
出處：選修數學甲(上)〈積分〉

目標：了解積分算法

解析：$\because\Gamma_1$和y軸交點$(0,-2)$，Γ_2和y軸交點$(0,-4)$

又Γ_1，Γ_2只交於兩點$(-1,-3)$和$(2,6)$

如下圖



故Γ_1，Γ_2兩函數圖形所圍成的區域面積為

$$\int_{-1}^{2}\left[(x^3-2)-(2x^3-3x-4)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$

$$=\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

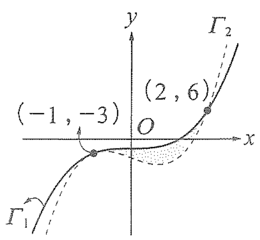
$=\dfrac{27}{4}$(平方單位)。

◎評分原則

$\because\Gamma_1$和y軸交點$(0,-2)$，Γ_2和y軸交點$(0,-4)$

又Γ_1，Γ_2只交於兩點$(-1,-3)$和$(2,6)$

如下圖



(2分)

故Γ_1，Γ_2兩函數圖形所圍成的區域面積為

$$\int_{-1}^{2}\left[(x^3-2)-(2x^3-3x-4)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$

$$=\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$=\dfrac{27}{4}$(平方單位)。　(2分)

14. 0

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：了解線性變換原理

解析：設 Γ_1 上一點 $P(x,y)$ 經 T 變換後為 Γ_2 上一點 $Q(x',y')$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'=ax \\ y'=bx+cy \end{cases}$$

代入 Γ_2 得 $bx+cy=2a^3x^3-3ax-4$

$$\Rightarrow y=\frac{2a^3}{c}x^3-\left(\frac{3a+b}{c}\right)x-\frac{4}{c}$$

又 $P(x,y)$ 在 Γ_1 上

$\therefore y=x^3-2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2a^3}{c}=1 \\ \dfrac{3a+b}{c}=0 \\ \dfrac{4}{c}=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases}$$

故 $a+b+c=0$。

◎評分原則

設 Γ_1 上一點 $P(x,y)$ 經 T 變換後為 Γ_2 上一點 $Q(x',y')$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'=ax \\ y'=bx+cy \end{cases} \quad (2\text{ 分})$$

代入 Γ_2 得 $bx+cy=2a^3x^3-3ax-4$

$$\Rightarrow y=\frac{2a^3}{c}x^3-\left(\frac{3a+b}{c}\right)x-\frac{4}{c} \quad (1\text{ 分})$$

又 $P(x,y)$ 在 Γ_1 上

$\therefore y=x^3-2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2a^3}{c}=1 \\ \dfrac{3a+b}{c}=0 \\ \dfrac{4}{c}=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases} \quad (2\text{ 分})$$

故 $a+b+c=0$。 (1 分)

15. 否，說明略

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：了解空間中直線與平面的關係

解析：$\because \dfrac{\overline{CE}}{\overline{CA}}=\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CB}}$

$\therefore \overline{EF} \,/\!/\, \overline{AB}$

又 $\overline{AB}$ 不在平面 DEF 上

$\therefore$直線 AB //平面 DEF，不相交。

◎評分原則

$\because \dfrac{\overline{CE}}{\overline{CA}}=\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CB}}$ $\quad \therefore \overline{EF} \,/\!/\, \overline{AB}$ (1 分)

又 $\overline{AB}$ 不在平面 DEF 上 (1 分)

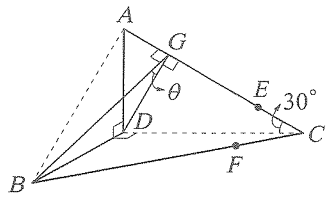
$\therefore$直線 AB // 平面 DEF，不相交。 (1 分)

16. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

出處：第二冊〈三角比〉、第四冊〈空間向量〉

目標：了解三角比定義、三垂線定理及兩面角的應用

解析：如下圖



過 D 作 $\overline{DG} \perp \overline{AC}$，連接 $\overline{BG}$

$\because \overline{BD} \perp \overline{AD}$，$\overline{BD} \perp \overline{CD}$

$\therefore \overline{BD} \perp$平面 ACD

又 $\overline{DG} \perp \overline{AC}$

$\therefore \overline{BG} \perp \overline{AC}$ (三垂線定理)，則 $\angle BGD=\theta$

即為平面 ABC 與平面 ACD 所夾的兩面角

又$\because \overline{BD} \perp \overline{DG}$，$\angle DCG=30^\circ$

$\therefore \overline{DG}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$，且 $\overline{BD}=\dfrac{1}{2}a$

$\therefore \overline{BG}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{DG}^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}a$

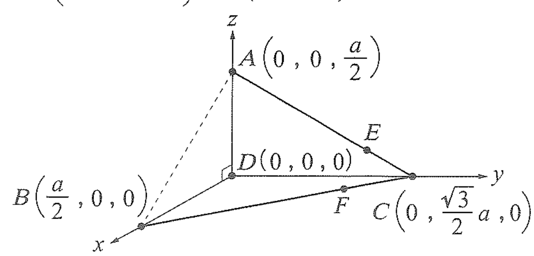
$\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BG}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$。

〈另解〉

建立空間坐標系，

令 $D(0,0,0)$，$B\left(\dfrac{a}{2},0,0\right)$，

$C\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$，$A\left(0,0,\dfrac{a}{2}\right)$



平面 E_{ABC}：$\dfrac{x}{\frac{a}{2}}+\dfrac{y}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\dfrac{z}{\frac{a}{2}}=1 \Rightarrow x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y+z=\dfrac{a}{2}$

平面 E_{ACD}：$x=0$

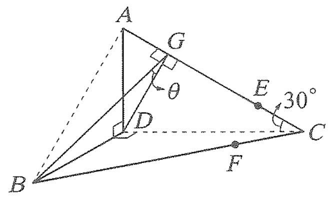
兩平面的法向量分別為 $\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{3}},1\right)$、$(1,0,0)$

$$\text{則 } \cos\theta=\pm\frac{(1,0,0)\cdot\left(1,\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)}{1\times\sqrt{1+\frac{1}{3}+1}}=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$。

◎評分原則

如下圖



過 D 作 $\overline{DG}\perp\overline{AC}$，連接 $\overline{BG}$

$\because\ \overline{BD}\perp\overline{AD}$，$\overline{BD}\perp\overline{CD}$

$\therefore\ \overline{BD}\perp$平面 ACD

又 $\overline{DG}\perp\overline{AC}$

$\therefore\ \overline{BG}\perp\overline{AC}$ (三垂線定理)，則 $\angle BGD=\theta$ (1 分)

即為平面 ABC 與平面 ACD 所夾的兩面角

又 $\because\ \overline{BD}\perp\overline{DG}$，$\angle DCG=30^\circ$

$\therefore\ \overline{DG}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$，且 $\overline{BD}=\dfrac{1}{2}a$

$\therefore\ \overline{BG}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{DG}^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}a$ (2 分)

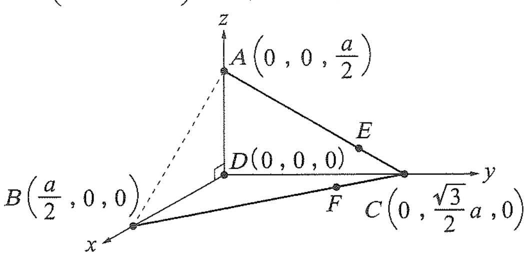
$\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BG}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$。 (1 分)

〈另解〉

建立空間坐標系，

令 $D(0,0,0)$，$B\left(\dfrac{a}{2},0,0\right)$，

$C\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$，$A\left(0,0,\dfrac{a}{2}\right)$



平面 E_{ABC}：$\dfrac{x}{\frac{a}{2}}+\dfrac{y}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\dfrac{z}{\frac{a}{2}}=1\Rightarrow x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y+z=\dfrac{a}{2}$ (1 分)

平面 E_{ACD}：$x=0$

兩平面的法向量分別為 $\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{3}},1\right)$、$(1,0,0)$

則 $\cos\theta=\pm\dfrac{(1,0,0)\cdot\left(1,\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)}{1\times\sqrt{1+\frac{1}{3}+1}}=\pm\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ (2 分)

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$。 (1 分)

17. $\dfrac{2}{3}$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：了解餘弦定理的應用

解析：$\because\ \overleftrightarrow{AB}\,//\,\overleftrightarrow{EF}$

又 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{DE}$ 夾角為 α

$\therefore\ \overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{ED}$ 夾角為 $180^\circ-\alpha$

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{BD}^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，且 $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CA}}=\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CB}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{AB}}=k$

$\therefore\ \overline{EF}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}ka$

又△DEF 為等腰三角形

$\overline{DE}^2=\overline{CE}^2+\overline{CD}^2-2\,\overline{CE}\times\overline{CD}\times\cos 30^\circ$

$=(ka)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-2\times ka\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\left(k^2-\dfrac{3}{2}k+\dfrac{3}{4}\right)a^2=\overline{DF}^2$

$\Rightarrow \overline{DE}=\overline{DF}=\left(\sqrt{k^2-\dfrac{3}{2}k+\dfrac{3}{4}}\right)a$

$\therefore \cos(180^\circ-\alpha)=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{EF}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{EF}}{2\overline{DE}}$

$=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}ka}{2\left(\sqrt{k^2-\frac{3}{2}k+\frac{3}{4}}\right)a}=\sqrt{\dfrac{2}{7}}$

$\Rightarrow k=\dfrac{2}{3}$ 或 2 (不合)　$\therefore k=\dfrac{2}{3}$。

〈另解〉

$\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{a}{2},0,-\dfrac{a}{2}\right)$，$\overrightarrow{DE}=\left(0,\dfrac{\sqrt{3}(1-k)a}{2},\dfrac{ka}{2}\right)$

$\therefore \cos\alpha=\dfrac{\left(\frac{a}{2},0,-\frac{a}{2}\right)\cdot\left(0,\frac{\sqrt{3}(1-k)a}{2},\frac{ka}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}a\times\left(\sqrt{\frac{3(1-k)^2+k^2}{4}}\right)a}$

$=-\sqrt{\dfrac{2}{7}}$

$\Rightarrow \dfrac{-\frac{k}{4}a^2}{\frac{\sqrt{2}}{4}a^2\left(\sqrt{4k^2-6k+3}\right)}=-\sqrt{\dfrac{2}{7}}$

$\Rightarrow \dfrac{k}{\sqrt{8k^2-12k+6}}=\sqrt{\dfrac{2}{7}}\Rightarrow k=\dfrac{2}{3}$ 或 2 (不合)

$\therefore k=\dfrac{2}{3}$。