

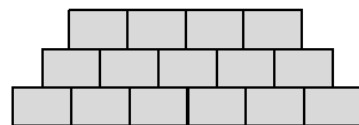
# 北北基高級中等學校 113 學年度分科模擬考數學甲 A 卷(113-E5)

第壹部分：選擇題(占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

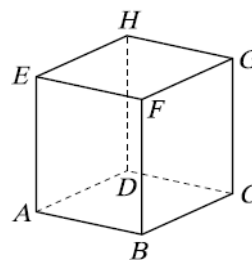


1. 寶寶用積木來排兩層以上的城牆，每往上一層都比下層少用一塊積木，如右圖所示就是一種排法。今她剛好用 52 塊一樣大小的積木排出一座城牆，則這座城牆有幾層呢？



- (1) 2 層 (2) 3 層 (3) 4 層 (4) 8 層 (5) 13 層
2. 任取一個四位數  $x$ ， $A(x)$  是把  $x$  的每一位數字相乘之後的值。當取到的  $x$  是奇數時， $A(x)$  為質數的機率是多少？(1)  $\frac{1}{300}$  (2)  $\frac{1}{750}$  (3)  $\frac{2}{1225}$  (4)  $\frac{3}{1225}$  (5)  $\frac{4}{1125}$

3. 如右圖，有一個立方體  $ABCD-EFGH$ ，其中  $A(2,0,0)$ ， $C(0,2,0)$ ， $D(0,0,0)$ ， $H(0,0,2)$ ，則以下哪一條直線



會穿過此立方體的內部？(1)  $L_1 : \begin{cases} x=2 \\ y=-1, t \text{ 為實數} \\ z=t \end{cases}$

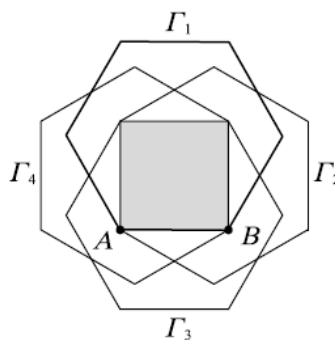
(2)  $L_2 : \begin{cases} x=-2 \\ y=-t, t \text{ 為實數} \\ z=3 \end{cases}$  (3)  $L_3 : \begin{cases} x+y=5 \\ z=\frac{5}{2} \end{cases}$  (4)  $L_4 : \begin{cases} y=1 \\ x+y+z=6 \end{cases}$

(5)  $L_5 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{4}$

二、多選題(占 40 分)

4. 若  $a$  為實數， $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 2x + 1$ ，已知  $f(x)$  為遞減函數，則以下哪些選項可能為  $a$  的值？(1) 2 (2)  $\sin 258^\circ$  (3)  $-\pi$  (4)  $\log_3 \frac{1}{2}$  (5)  $\sqrt[10]{2}$

5. 右圖中四個正六邊形  $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$ 、 $\Gamma_3$ 、 $\Gamma_4$  的其中一邊恰為某個正方形的邊，已知  $A(0,0)$ 、 $B(1,0)$ ，試選出正確的選項。



(1)  $\Gamma_1$  經由矩陣  $\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ -\sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$  變換可得  $\Gamma_2$  (2)  $\Gamma_1$  經由矩陣

$\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$  變換可得  $\Gamma_4$  (3)  $\Gamma_1$  經由矩陣  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  變換

可得  $\Gamma_2$  (4)  $\Gamma_1$  經由矩陣  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  變換可得  $\Gamma_3$  (5)  $\Gamma_1$  經由矩陣  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  變換可得  $\Gamma_4$

6. 直角  $\triangle ABC$  中， $\angle C$  為直角， $\overline{BC} = 2$ ， $\overline{CA} = 1$ ， $P$  是斜邊  $\overline{AB}$  上的點，使得

$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB}$ ，則下列哪些敘述是正確的？(1)  $\overline{CP} \perp \overline{AB}$  (2)  $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 2$

(3)  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{4}{5}$  (4)  $\sin \angle ACP = \frac{2}{\sqrt{5}}$  (5)  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$

7. 三相異直線  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ ，若  $L_2$ 、 $L_3$  交於  $(p_1, q_1)$ ， $L_1$ 、 $L_3$  交於  $(p_2, q_2)$ ， $L_1$ 、 $L_2$  交於  $(p_3, q_3)$ ，當  $L_1$  向右平移  $K$  單位變為  $L'_1$  時， $L'_1$ 、 $L_3$  交於  $(p_2 - 12, q_2 - 5)$ ， $L'_1$ 、 $L_2$  交於  $(p_3 + 3, q_3 - 4)$ ，試選出正確的選項。  
 (1)  $L_2$  的斜率為  $-\frac{3}{4}$  (2)  $L_3$  的斜率為  $\frac{5}{12}$   
 (3)  $L_1$  的斜率為  $\frac{1}{15}$  (4) 若  $L_2$  與  $L_3$  的銳夾角為  $\theta$ ，則  $\tan \theta = \frac{63}{16}$  (5)  $K = 63$
8. 若  $f(a)$  代表  $2 < |2x - 3| < \log a$  的整數解個數，試選出正確的選項。  
 (1)  $f(10) = 0$  (2)  $f(2025) = 2$  (3) 若  $a$  為 7 位數，則  $f(a) = 4$   
 (4) 若  $f(a) = 4$ ，則  $a$  的最大整數值與最小整數值相差  $9.9 \times 10^6 - 1$  (5)  $f(a)$  可能為奇數

### 三、選填題(占 18 分)

9. 社團有 6 個男學生及 6 個女學生預計出遊，後來統計出遊人數時，發現男生人數和女生人數相同(可能皆為 0 人)，則共有\_\_\_\_\_種不同的出遊組合。
10. 設  $f(x)$  為  $x$  的三次多項式函數，且  $f(x) + f'(x) = 2x^3$ ，試求  $f(-1) =$ \_\_\_\_\_。
11. 有一三角錐  $A-BCD$ ，其中  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = 10$ ， $\overline{CD} = 12$ ，  
 則  $\left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right| =$ \_\_\_\_\_。(化為最簡根式)

### 第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

#### 12-13 題為題組

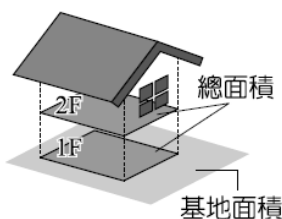
依照 S 市政府 建築法規住宅區建築基地規定：

- (i) 「住一」建蔽率不得大於 60%，容積率不得大於 120%，惟建蔽率低於 50% 時，容積率不得大於 150%。  
 (ii) 「住二」建蔽率不得大於 60%，容積率不得大於 150%，惟建蔽率低於 50% 時，容積率不得大於 180%。

其中「建蔽率」又稱建築密度或建築覆蓋率，指建築基地上，建築物的水平投影面積與建築基地面積的比值，簡單解釋為一塊空地可以蓋多少建築面積，其餘面積作為通路、綠化等等公共空間，建蔽率  $= \frac{\text{建築面積}}{\text{基地面積}} \times 100(\%)$ 。而「容積率」是指建築物的總樓地板面積占基地

面積的比例，容積率  $= \frac{\text{總面積}}{\text{基地面積}} \times 100(\%)$ 。

若  $\triangle ABC$  是地主老陳在 S 市 一塊「住二」的建地，其三邊長分別為 70 公尺、80 公尺、90 公尺，且其內切圓與  $\triangle ABC$  相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$ 。試回答下列問題。



12. 設 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的外接圓半徑分別為 $R_1$ 、 $R_2$ ，試求 $\frac{R_2}{R_1}$ 之值為何？

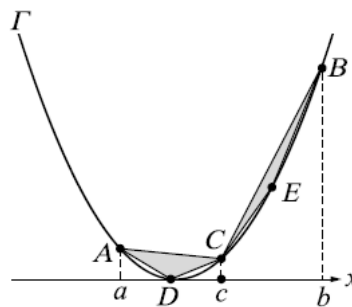
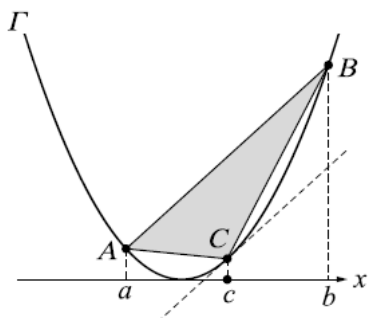
(非選擇題，5分)

13. 地主老陳想要在 $\triangle DEF$ 上蓋一幢別墅，每個樓層的樓地板面積都跟 $\triangle DEF$ 的面積一樣大，請計算出建蔽率，再按照法規推估老陳的別墅最多可蓋幾層樓？

(非選擇題，5分)

14-17 題為題組

在拋物線 $\Gamma: y = 4x^2$ 上有兩點 $A(a, 4a^2)$ 、 $B(b, 4b^2)$ ，其中 $b > a$ ，若以拋物線上一點 $C$ 為切點之切線與 $\overline{AB}$ 平行，試回答下列問題。



14.  $C$ 點的 $x$ 坐標為何？(單選題，2分)

- (1)  $a+b$       (2)  $2(a+b)$       (3)  $4(a+b)$       (4)  $\frac{a+b}{2}$       (5)  $\frac{a+b}{4}$

15. 若以拋物線上一點 $D$ 為切點的切線與 $\overline{AC}$ 平行，以拋物線上一點 $E$ 為切點的切線與 $\overline{BC}$ 平行，試選出正確的選項。(多選題，5分) (1)  $D$ 點的 $x$ 坐標為 $\frac{3a+b}{4}$  (2)  $E$ 點的 $x$ 坐標

為 $\frac{a+3b}{4}$  (3)  $\triangle ABC$ 面積為 $\frac{(b-a)^3}{2}$  (4)  $\triangle ACD$ 面積為 $\frac{(b-a)^3}{16}$

(5)  $\frac{\triangle ACD \text{ 面積} + \triangle BCE \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}}$ 之值為 $\frac{1}{4}$

16. 利用 15. 的結論，重複以上步驟，若以拋物線上一點 $F$ 為切點的切線與 $\overline{AD}$ 平行，以拋物線上一點 $G$ 為切點的切線與 $\overline{DC}$ 平行，以拋物線上一點 $H$ 為切點的切線與 $\overline{CE}$ 平行，以拋物線上一點 $I$ 為切點的切線與 $\overline{EB}$ 平行，……， $\Gamma$ 和 $\overline{AB}$ 所圍區域面積視為無窮多個三角形的面積和，即 $\triangle ABC$ 面積 $+$ ( $\triangle ACD$ 面積 $+$  $\triangle BCE$ 面積) $+$ ( $\triangle AFD$ 面積 $+$  $\triangle DGC$ 面積 $+$  $\triangle CHE$ 面積 $\triangle EIB$ 面積) $+$ ……。試將 $\frac{\Gamma \text{ 和 } \overline{AB} \text{ 所圍區域面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}}$ 表示為一無窮等比級數，並計算其值。(非選擇題，4分)

17. 若 $a=0$ ， $b=1$ ，利用定積分的方法求出 $\Gamma$ 和 $\overline{AB}$ 所圍區域面積之值。(非選擇題，3分)

參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.732$ ,  $\sqrt{5} \approx 2.236$ ,  $\sqrt{6} \approx 2.449$ ,  $\pi \approx 3.142$

對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ,  $\log 3 \approx 0.4771$ ,  $\log 5 \approx 0.6990$ ,  $\log 7 \approx 0.8451$

**RA5128 北北基高級中等學校 113 學年度分科模擬考數學甲 A 卷(113-E5)**

**參考答案**

選擇題：1. (4) 2. (1) 3. (5) 4. (2)(4) 5. (1)(3) 6. (1)(3)(5) 7. (2)(3)(4)(5)  
8. (1)(2)(3)(4)

選填題：9. 924 10.  $-32$  11.  $120\sqrt{39}$

混合題或非選擇題：12.  $\frac{10}{21}$  13. 建蔽率  $\frac{5}{21}$ ，7 層

14. (4) 15. (1)(2)(3)(4)(5) 16.  $\frac{4}{3}$  17.  $\frac{2}{3}$