數學甲考科 A 卷詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(1)	(5)	(2)(4)	(1)(3)	(1)(3)(5)	(2)(3)(4)(5)
8.						
(1)(2)(3)(4)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (4)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：解決級數和的情境問題

解析：設一共有 n 層，且最上層有 x 塊積木，最下層有 $x+n-1$ 塊積木

則列方程式 $\dfrac{[x+(x+n-1)]\times n}{2}=52$

$\Rightarrow n(2x+n-1)=104=2^3\times 13$

若 $n=2$，$x=\dfrac{51}{2}$，不合

若 $n=4$，$x=\dfrac{23}{2}$，不合

若 $n=8$，$x=3$

若 $n=13$，$x=-2$，不合

故選(4)。

2. (1)

出處：第四冊〈機率〉

目標：條件機率的定義

解析：四個數字相乘的結果是質數，則必有 3 個 1 與 1 個質數 (2 或 3 或 5 或 7)

其中 2 不可排在個位數

$\therefore$機率為 $\dfrac{\frac{4!}{3!}\times 3+\frac{3!}{2!}}{\frac{10000-1000}{2}}=\dfrac{15}{4500}=\dfrac{1}{300}$，故選(1)。

3. (5)

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：空間中直線方程式的應用

解析：(1)╳：L_1 的方向向量為 $(0,0,1)$

又 $(2,-1,0)$ 不在此立方體的內部及邊界上

$\therefore L_1$ 與直線 AE 平行

$\Rightarrow L_1$ 與此立方體不相交

(2)╳：L_2 的方向向量為 $(0,-1,0)$

又 $(-2,0,3)$ 不在此立方體的內部及邊界上

$\therefore L_2$ 與直線 EF 平行

$\Rightarrow L_2$ 與此立方體不相交

(3)╳：平面 $z=\dfrac{5}{2}$ 與平面 $EFGH$ 平行

又 L_3 在平面 $z=\dfrac{5}{2}$ 上

$\Rightarrow L_3$ 與此立方體不相交

(4)╳：平面 $x+y+z=6$ 和此立方體僅交於點 $(2,2,2)$

但點 $(2,2,2)$ 不在平面 $y=1$ 上

$\Rightarrow L_4$ 和此立方體不相交

(5)○：L_5 可寫成 $\begin{cases}x=2+2t\\ y=3+3t\\ z=4+4t\end{cases}$，$t$ 為實數

點 $(2,3,4)$ 在 L_5 上，根據 $(2,3,4)$ 位置可知

L_5 可能和平面 $ABFE$、平面 $BCGF$、平面 $EFGH$ 其中之一相交

又 D 在 L_5 上

$\therefore L5$ 必穿過此立方體內部

故選(5)。

二、多選題

4. (2)(4)

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：函數的遞減性判斷

解析：$f'(x)=3ax^2+4ax-2$

$f(x)$為遞減函數 $\Leftrightarrow$ 則 $f'(x)\le 0$ 恆成立

①當 $a\neq 0$ 時，$\begin{cases}3a<0\\ \text{判別式 } D=(4a)^2-4\cdot 3a\cdot(-2)\le 0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}a<0\\ 16a^2+24a\le 0\end{cases}$

即 $-\dfrac{3}{2}\le a<0$

②當 $a=0$ 時，$f(x)=-2x+1$

應為遞減函數

$\therefore -\dfrac{3}{2}\le a\le 0$

(1)╳

(2)○：$-1<\sin 258^\circ<0$

(3)╳：$-\pi\approx -3.142<-\dfrac{3}{2}$

(4)○：$\log_3\dfrac{1}{2}=-\log_3 2$

$\therefore 0>\log_3\dfrac{1}{2}>-\log_3 3=-1$

(5)╳：$\sqrt[10]{2}>0$

故選(2)(4)。

5. (1)(3)

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：線性變換的定義

解析：(1)○：$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6}\\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}$ 代表以 $A(0,0)$ 為中心，

順時針方向旋轉 $\dfrac{\pi}{6}$

而 Γ_2 是由 Γ_1 以 $A(0,0)$ 為中心，

順時針方向旋轉 $\dfrac{\pi}{6}$ 而得

(2)╳：$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}$ 代表以 $A(0,0)$ 為中心，

逆時針方向旋轉 $\dfrac{\pi}{6}$

但 Γ_4 是由 Γ_1 以 $B(1,0)$ 為中心，

逆時針方向旋轉 $\dfrac{\pi}{6}$ 而得

(3) ○：$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$代表對 $y=x$ 作鏡射

而 Γ_2 是由 Γ_1 對 $y=x$ 作鏡射而得

(4) ╳：$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$代表對 x 軸作鏡射

而 Γ_3 是由 Γ_1 對 $y=\dfrac{1}{2}$ 作鏡射而得

(5) ╳：$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$代表對 $y=-x$ 作鏡射

而 Γ_4 是由 Γ_1 對 $y=-x+1$ 作鏡射而得

故選(1)(3)。

6. (1)(3)(5)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：內積的運算

解析：(1) ○：$\because \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}$

$\therefore \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})$

$=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}$

$=0$

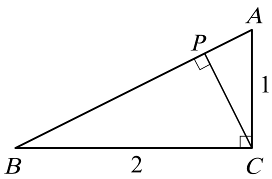
故 $\overline{CP}\perp\overline{AB}$

(2) ╳：斜邊 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AP}:\overline{PB}=(\overline{AC}\cos A):(\overline{BC}\cos B)$

$=\left(1\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right):\left(2\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$=1:4$



(3) ○：$\because \overline{CP}\perp\overline{AB}$

$\therefore \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CP}=\overline{CP}\cdot\overline{CP}=\left(\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2$

$=\left(\dfrac{1\times 2}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{4}{5}$

(4) ╳：$\because \angle ACP=\angle B$

$\therefore \sin\angle ACP=\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(5) ○：$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\overline{CP}\cdot\overline{CP}+0+\overline{AP}\cdot\overline{AP}$

$=\overline{CP}^2+\overline{AP}^2=\overline{AC}^2=1$

故選(1)(3)(5)。

7. (2)(3)(4)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈三角函數〉

目標：斜率的應用

解析：(1) ╳：L_2 過 (p_3, q_3) 及 (p_3+3, q_3-4)

$\therefore L_2$ 的斜率為 $\dfrac{q_3-4-q_3}{p_3+3-p_3}=-\dfrac{4}{3}$

(2) ○：L_3 過 (p_2, q_2) 及 (p_2-12, q_2-5)

$\therefore L_3$ 的斜率為 $\dfrac{q_2-5-q_2}{p_2-12-p_2}=\dfrac{5}{12}$

(3) ○：L_1 過 (p_2, q_2) 及 (p_3, q_3)

L_1' 過 (p_2-12, q_2-5) 及 (p_3+3, q_3-4)

$\because L_1$ 的斜率$=L_1'$ 的斜率

$\therefore \dfrac{q_2-q_3}{p_2-p_3}=\dfrac{(q_2-5)-(q_3-4)}{(p_2-12)-(p_3+3)}$

$=\dfrac{(q_2-q_3)-1}{(p_2-p_3)-15}$

$\Rightarrow \dfrac{q_2-q_3}{p_2-p_3}=\dfrac{1}{15}$

(4) ○：設 L_2 的斜率為 m_2，L_3 的斜率為 m_3，

則 $|\tan\theta|=\left|\dfrac{m_2-m_3}{1+m_2m_3}\right|=\left|\dfrac{-\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{12}}{1+\left(-\dfrac{4}{3}\right)\times\dfrac{5}{12}}\right|$

$=\dfrac{63}{16}$

(5) ○：$L_1: y-q_2=\dfrac{1}{15}(x-p_2)$

$L_1': y-(q_2-5)=\dfrac{1}{15}[x-(p_2-12)]$

$\Rightarrow y-q_2=\dfrac{1}{15}(x-p_2)-\dfrac{21}{5}$，

即 $y-q_2=\dfrac{1}{15}(x-p_2-63)$

$\therefore K=63$

故選(2)(3)(4)(5)。

8. (1)(2)(3)(4)

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈指數、對數〉

目標：絕對值不等式、常用對數的意義

解析：(1) ○：$f(10)$ 代表 $2<|2x-3|<\log 10$ 的整數解個數，

又 $\log 10=1$

$\therefore f(10)=0$

(2) ○：$f(2025)$ 代表 $2<|2x-3|<\log 2025$ 的整數解個數，又 $3<\log 2025<4$

$\therefore |2x-3|=3 \Rightarrow x=0$ 或 3

故 $f(2025)=2$

(3) ○：$f(a)$ 代表 $2<|2x-3|<\log a$ 的整數解個數，

又 $6\le\log a<7$

$\therefore |2x-3|=3$ 或 5

($\because x$ 為整數　$\therefore |2x-3|$ 必為奇數)

$\Rightarrow x=0$ 或 3 或 4 或 -1

故 $f(a)=4$

(4) ○：$\because |2x-3|$ 為奇數

$\therefore f(a)=4$ 時，$|2x-3|=3$ 或 5

因此 $5<\log a\le 7$

a 的最大整數值為 10^7，最小整數值為 10^5+1

兩者相差 $10^7-10^5-1=99\times10^5-1=9.9\times10^6-1$

(5) ╳：若 x 為整數，則 $|2x-3|$ 也為整數，

又 $|2x-3|\neq 0$

故 $2x-3$ 有兩個不同的值 (互為相反數)，

$\therefore f(a)$ 必為偶數

故選(1)(2)(3)(4)。

三、選填題

9. 924

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：組合在生活中的應用

解析：男生人數可能有 0 人，1 人，……，6 人

$\therefore$出遊組合有

$C_0^6C_0^6+C_1^6C_1^6+C_2^6C_2^6+C_3^6C_3^6+C_4^6C_4^6+C_5^6C_5^6+C_6^6C_6^6$

$=1+36+225+400+225+36+1=924$ (種)。

〈另解〉

由 $(1+x)^6=C_0^6x^6+C_1^6x^5+C_2^6x^4+C_3^6x^3+C_4^6x^2+C_5^6x+C_6^6$ ………①

$(x+1)^6=C_0^6+C_1^6x+C_2^6x^2+C_3^6x^3+C_4^6x^4+C_5^6x^5+C_6^6x^6$ …… ②

$\therefore(1+x)^{12}$ 展開式的 x^6 項的係數與①×②中的 x^6 項係數相同

故所求為 $C_0^6C_0^6+C_1^6C_1^6+C_2^6C_2^6+C_3^6C_3^6+C_4^6C_4^6+C_5^6C_5^6+C_6^6C_6^6=C_6^{12}=924$ (種)。

10. -32

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：微分的計算

解析：設 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$，所以 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

$f(x)+f'(x)=2x^3+(a+6)x^2+(b+2a)x+(c+b)=2x^3$

比較係數得知 $a+6=b+2a=c+b=0$

$\therefore a=-6$，$b=12$，$c=-12$

故 $f(-1)=-2+a-b+c=-2+(-6)-12+(-12)$

$=-32$。

11. $120\sqrt{39}$

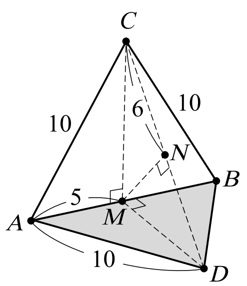
出處：第四冊〈空間向量〉

目標：利用空間概念求三角錐體積

解析：$|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=$(三角錐 $A-BCD$ 的體積)×6

$=$(三角錐 $C-ABD$ 的體積)×6

如下圖所示



取 $\overline{AB}$ 中點 M，則 $\overline{CM}=\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times10=5\sqrt{3}$，

三角錐 $C-ABD$ 的高即為$\triangle CDM$ 中，$\overline{DM}$ 上的高 h

取 $\overline{CD}$ 中點 N，則 $\overline{MN}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2-6^2}=\sqrt{39}$

$\therefore\dfrac{1}{2}\times12\times\sqrt{39}=\dfrac{1}{2}\times5\sqrt{3}\times h\Rightarrow h=\dfrac{12\sqrt{13}}{5}$

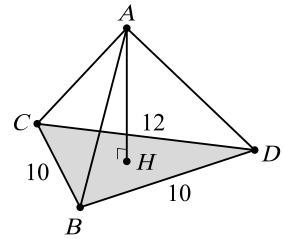
故 $|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|$

$=\dfrac{1}{3}\times\triangle ABD$ 面積$\times h\times6$

$=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times10^2\right)\times\dfrac{12\sqrt{13}}{5}\times6=120\sqrt{39}$。

〈另解〉

令 A 作垂線交$\triangle BCD$ 的垂足為 H



$\because\overline{AC}=\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{AH}$ 為共用邊且 $\overline{AH}\perp\triangle BCD$

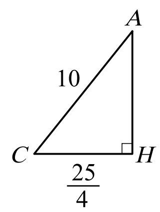
$\therefore\triangle ACH\cong\triangle ADH\cong\triangle ABH$

$\Rightarrow H$ 為$\triangle BCD$ 的外心

又$\triangle BCD$ 的面積為 $\sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)}$

$=\sqrt{16\times6\times6\times4}=48$

故$\triangle BCD$ 的外接圓半徑為 $\dfrac{10\times10\times12}{4\times48}=\dfrac{25}{4}$



$\overline{AH}=\sqrt{10^2-\left(\dfrac{25}{4}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{39}}{4}$

故三角錐 $A-BCD$ 的體積為 $\dfrac{1}{3}\times48\times\dfrac{5\sqrt{39}}{4}=20\sqrt{39}$

故所求為 $6\times20\sqrt{39}=120\sqrt{39}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. $\dfrac{10}{21}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：三角比的應用

解析：$\triangle ABC$ 的半周長 $s=\dfrac{70+80+90}{2}=120$，

面積為 $\sqrt{120(120-70)(120-80)(120-90)}$

$=1200\sqrt{5}$ (平方公尺)

設$\triangle ABC$ 的內切圓圓心 O

$\because\overline{OD}$、$\overline{OE}$、$\overline{OF}$ 為內切圓半徑且與$\triangle ABC$ 的三邊垂直

$\therefore$內切圓半徑$=\dfrac{\triangle ABC\text{ 面積}}{s}$

$=\dfrac{1200\sqrt{5}}{120}$

$=10\sqrt{5}$

令$\triangle ABC$ 的三邊長為 a，b，c

$\therefore$外接圓半徑 $R_1=\dfrac{abc}{4\times\triangle ABC\text{ 面積}}$

$=\dfrac{70\times80\times90}{4\times1200\sqrt{5}}$

$=21\sqrt{5}$

又$\triangle DEF$ 的外接圓即為$\triangle ABC$ 的內切圓

$\therefore R_2=10\sqrt{5}$

故 $\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{10\sqrt{5}}{21\sqrt{5}}=\dfrac{10}{21}$。

◎評分原則

$\triangle ABC$ 的半周長 $s=\dfrac{70+80+90}{2}=120$，

面積為 $\sqrt{120(120-70)(120-80)(120-90)}$

$=1200\sqrt{5}$ (平方公尺)　(1 分)

設$\triangle ABC$ 的內切圓圓心 O

$\because \overline{OD}$ 、$\overline{OE}$ 、$\overline{OF}$ 為內切圓半徑且與$\triangle ABC$ 的三邊垂直

$\therefore$內切圓半徑$=\dfrac{\triangle ABC\text{ 面積}}{s}=\dfrac{1200\sqrt{5}}{120}=10\sqrt{5}$　(1 分)

令$\triangle ABC$ 的三邊長為 a，b，c

$\therefore$外接圓半徑 $R_1=\dfrac{abc}{4\times\triangle ABC\text{ 面積}}$

$=\dfrac{70\times80\times90}{4\times1200\sqrt{5}}=21\sqrt{5}$　(1 分)

又$\triangle DEF$ 的外接圓即為$\triangle ABC$ 的內切圓

$\therefore R_2=10\sqrt{5}$　(1 分)

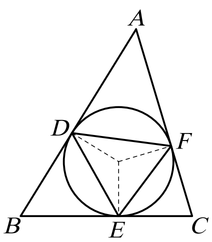
故 $\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{10\sqrt{5}}{21\sqrt{5}}=\dfrac{10}{21}$。　(1 分)

13. 建蔽率 $\dfrac{5}{21}$，7 層

出處：第二冊〈三角比〉

目標：三角比的應用

解析：



承 12.，$\triangle DEF$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\cdot R_2^2\sin(180^\circ-A)$

$+\dfrac{1}{2}\cdot R_2^2\sin(180^\circ-B)$

$+\dfrac{1}{2}\cdot R_2^2\sin(180^\circ-C)$

$=\dfrac{R_2^2}{2}(\sin A+\sin B+\sin C)$

$=\dfrac{R_2^2}{2}\left(\dfrac{a}{2R_1}+\dfrac{b}{2R_1}+\dfrac{c}{2R_1}\right)$

$=\dfrac{R_2^2}{2R_1}\times\dfrac{a+b+c}{2}$

$=\dfrac{R_2}{2R_1}\times R_2 s$

$=\dfrac{R_2}{2R_1}\times\triangle ABC$ 面積

由於建蔽率$=\dfrac{\triangle DEF\text{ 面積}}{\triangle ABC\text{ 面積}}=\dfrac{R_2}{2R_1}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10}{21}=\dfrac{5}{21}<50\ \%$

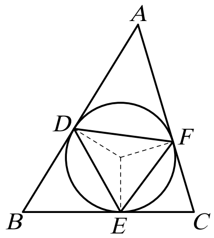
$\therefore$容積率$\leq\triangle ABC$ 面積$\times180\ \%=2160\sqrt{5}$ (平方公尺)

又 $\dfrac{\text{室內樓地板最大總面積}}{\text{建築面積}}=\dfrac{2160\sqrt{5}}{\triangle DEF\text{ 面積}}$

$=\dfrac{2160\sqrt{5}}{\frac{5}{21}\times1200\sqrt{5}}=7.56$

$\Rightarrow$ 最多可蓋 7 層。

◎評分原則



承 12.，$\triangle DEF$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\cdot R_2^2\sin(180^\circ-A)$

$+\dfrac{1}{2}\cdot R_2^2\sin(180^\circ-B)$

$+\dfrac{1}{2}\cdot R_2^2\sin(180^\circ-C)$　(1 分)

$=\dfrac{R_2^2}{2}(\sin A+\sin B+\sin C)$

$=\dfrac{R_2^2}{2}\left(\dfrac{a}{2R_1}+\dfrac{b}{2R_1}+\dfrac{c}{2R_1}\right)$　(1 分)

$=\dfrac{R_2^2}{2R_1}\times\dfrac{a+b+c}{2}$

$=\dfrac{R_2}{2R_1}\times R_2 s$

$=\dfrac{R_2}{2R_1}\times\triangle ABC$ 面積　(1 分)

由於建蔽率$=\dfrac{\triangle DEF\text{ 面積}}{\triangle ABC\text{ 面積}}=\dfrac{R_2}{2R_1}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10}{21}=\dfrac{5}{21}<50\ \%$　(1 分)

$\therefore$容積率$\leq\triangle ABC$ 面積$\times180\ \%=2160\sqrt{5}$ (平方公尺)

又 $\dfrac{\text{室內樓地板最大總面積}}{\text{建築面積}}=\dfrac{2160\sqrt{5}}{\triangle DEF\text{ 面積}}$

$=\dfrac{2160\sqrt{5}}{\frac{5}{21}\times1200\sqrt{5}}$

$=7.56$

$\Rightarrow$ 最多可蓋 7 層。　(1 分)

14. 15. (4)

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：求函數圖形的切線斜率

解析：$\overline{AB}$ 的斜率為 $\dfrac{4a^2-4b^2}{a-b}=4(a+b)$

設 $C(c\ ,4c^2)$，$f(x)=4x^2\Rightarrow f'(x)=8x$

則 $f'(c)=8c=4(a+b)$

可得 $c=\dfrac{a+b}{2}$

故選(4)。

15. (1)(2)(3)(4)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈三角比〉

目標：理解情境中的數列問題

解析：(1) ◯：承 14.，同理 D 點的 x 坐標恰為

$\dfrac{a+\frac{a+b}{2}}{2}=\dfrac{3a+b}{4}$

(2) ◯：承 14.，同理 E 點的 x 坐標恰為

$\dfrac{\frac{a+b}{2}+b}{2}=\dfrac{a+3b}{4}$

(3) ○：$\triangle ABC$ 面積為

大梯形面積－2 個小梯形面積

$=\frac{1}{2}\times(4a^2+4b^2)(b-a)-\frac{1}{2}\times(4a^2+4c^2)\times\frac{b-a}{2}$

$-\frac{1}{2}\times(4b^2+4c^2)\times\frac{b-a}{2}$

$=(2a^2+2b^2)(b-a)-(a^2+c^2)(b-a)$

$-(b^2+c^2)(b-a)$

$=(a^2+b^2-2c^2)(b-a)$

$=\left[a^2+b^2-2\times\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right](b-a)=\frac{(b-a)^3}{2}$

〔另解〕

設 C 點坐標為 $(c\,,4c^2)$

$\overrightarrow{AB}=(b-a\,,4b^2-4a^2)$

$\overrightarrow{AC}=(c-a\,,4c^2-4a^2)$

$\triangle ABC$ 面積$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ 4b^2-4a^2 & 4c^2-4a^2 \end{vmatrix}\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ 4(b^2-a^2) & 4(c^2-a^2) \end{vmatrix}\right|$

$=2\times(b-a)(c-a)$

$\times\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & a+c \end{vmatrix}\right|$

$=2(b-a)(c-a)\times|(c-b)|$

$=2(b-a)(c-a)(b-c)$

$=2(b-a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)$

$=\frac{(b-a)^3}{2}$

(4) ○：承(3)，同理$\triangle ACD$ 面積為

$$\frac{(c-a)^3}{2}=\frac{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^3}{2}=\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^3}{2}=\frac{(b-a)^3}{16}$$

(5) ○：承(3)，同理$\triangle BCE$ 面積為

$$\frac{(b-c)^3}{2}=\frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3}{2}=\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^3}{2}=\frac{(b-a)^3}{16}$$

故 $\frac{\triangle ACD\text{ 面積}+\triangle BCE\text{ 面積}}{\triangle ABC\text{ 面積}}$

$=\frac{\frac{(b-a)^3}{16}+\frac{(b-a)^3}{16}}{\frac{(b-a)^3}{2}}=\frac{1}{4}$

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

16. $\frac{4}{3}$

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：無窮等比級數的和

解析：承 15. 討論，

$\triangle AFD$ 面積$=\triangle DGC$ 面積$=\triangle CHE$ 面積$=\triangle EIB$ 面積

$=\frac{1}{8}\triangle ACD$ 面積$=\frac{1}{128}(b-a)^3$

故

$\frac{\triangle AFD\text{ 面積}+\triangle DGC\text{ 面積}+\triangle CHE\text{ 面積}+\triangle EIB\text{ 面積}}{\triangle ABC\text{ 面積}}$

$=\frac{\frac{1}{128}\times 4}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{16}$

$\therefore \frac{\Gamma\text{ 和 }\overline{AB}\text{ 所圍區域面積}}{\triangle ABC\text{ 面積}}$

$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$。

◎評分原則

承 15. 討論，

$\triangle AFD$ 面積$=\triangle DGC$ 面積$=\triangle CHE$ 面積$=\triangle EIB$ 面積

$=\frac{1}{8}\triangle ACD$ 面積$=\frac{1}{128}(b-a)^3$　(1 分)

故

$\frac{\triangle AFD\text{ 面積}+\triangle DGC\text{ 面積}+\triangle CHE\text{ 面積}+\triangle EIB\text{ 面積}}{\triangle ABC\text{ 面積}}$

$=\frac{\frac{1}{128}\times 4}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{16}$　(1 分)

$\therefore \frac{\Gamma\text{ 和 }\overline{AB}\text{ 所圍區域面積}}{\triangle ABC\text{ 面積}}$

$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$。　(2 分)

17. $\frac{2}{3}$

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

目標：求曲線下的面積

解析：可知 $A(0\,,0)$，$B(1\,,4)$，直線 $\overline{AB}$ 的方程式為 $y=4x$

$\therefore \Gamma$ 和 $\overline{AB}$ 所圍區域面積為

$\int_0^1(4x-4x^2)dx=\left(2x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^1=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$。

◎評分原則

可知 $A(0\,,0)$，$B(1\,,4)$，直線 $\overline{AB}$ 的方程式為 $y=4x$

$\therefore \Gamma$ 和 $\overline{AB}$ 所圍區域面積為

$\int_0^1(4x-4x^2)dx$　(1 分)

$=\left(2x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^1$　(1 分)

$=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$。　(1 分)