

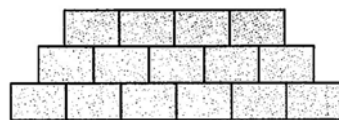
北北基高中 114 年(113 學年度)高三下第五次 分科測驗模擬考數學(數甲 A 卷)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 寶寶用積木來排兩層以上的城牆，每往上一層都比下層少用一塊積木，如右圖所示就是一種排法。今她剛好用 52 塊一樣大小的積木排出一座城牆，則這座城牆有幾層呢？
(1) 2 層 (2) 3 層 (3) 4 層 (4) 8 層 (5) 13 層



【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答：(4)

解： $(k) + (k+1) + (k+2) + \cdots + (k+n-1) = \frac{(2k+n-1)n}{2} = 52$

$$\Rightarrow n(2k+n-1) = 104 = 2^3 \times 13$$

為 n 為偶， $2k+n-1$ 必為奇；若 n 為奇， $2k+n-1$ 必為偶

$\Rightarrow n=8, k=3$ (成立)； $n=13, k=-2$ (不成立)

2. 任取一個四位數 x ， $A(x)$ 是把 x 的每一位數字相乘之後的值。當取到的 x 是奇數時， $A(x)$ 為質數的機率是多少？

- (1) $\frac{1}{300}$ (2) $\frac{1}{750}$ (3) $\frac{2}{1225}$ (4) $\frac{3}{1225}$ (5) $\frac{4}{1125}$

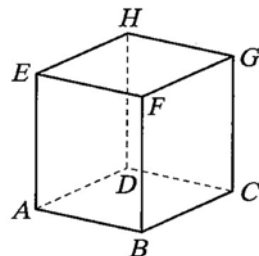
【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答：(1)

解： $\frac{\frac{4!}{3!} \times \frac{4}{2,3,5,7} - \frac{1}{1112 \text{ 不合}}}{(9999-999) \times \frac{1}{2}} = \frac{15}{4500} = \frac{1}{300}$

3. 如右圖，有一個立方體 $ABCD-EFGH$ ，其中 $A(2,0,0)$ ， $C(0,2,0)$ ， $D(0,0,0)$ ， $H(0,0,2)$ ，則以下哪一條直線會穿過此立方體的內部？

- (1) $L_1: \begin{cases} x=2 \\ y=-1, t \text{ 為實數} \\ z=t \end{cases}$ (2) $L_2: \begin{cases} x=-2 \\ y=-t, t \text{ 為實數} \\ z=3 \end{cases}$
(3) $L_3: \begin{cases} x+y=5 \\ z=\frac{5}{2} \end{cases}$ (4) $L_4: \begin{cases} y=1 \\ x+y+z=6 \end{cases}$



$$(5) L_5 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{4}$$

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答：(5)

解：(1)過 $(2, -1, 0)$ ，上下延伸，無交點

(2)過 $(-2, 0, 3)$ ，左右延伸，無交點

(3)過 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ，斜直線，不過 F

(4)過 $\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)$ ，斜直線，不交 $\overline{EF}$

(5)過 $(0, 0, 0)$ ， $(2, 3, 4)$ 連線，與 $EFGH$ 交於 $\left(1, \frac{3}{2}, 2\right)$

二、多選題

4. 若 a 為實數， $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 2x + 1$ ，已知 $f(x)$ 為遞減函數，則以下哪些選項可能為 a 的值？

- (1) 2 (2) $\sin 258^\circ$ (3) $-\pi$ (4) $\log_3 \frac{1}{2}$ (5) $\sqrt[10]{2}$

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答：(2)(4)

解： $f'(x) = 3ax^2 + 4ax - 2 \leq 0$ 恆成立

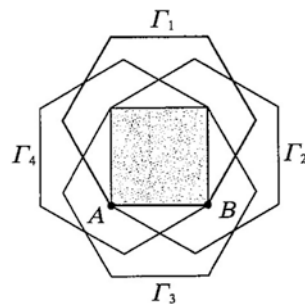
① $a = 0$ ，成立

② $a \neq 0$ ， $a < 0$ 且判別式： $(4a)^2 - 4(3a)(-2) \leq 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq a < 0$

綜合上述： $-\frac{3}{2} \leq a \leq 0$

而(1) 2 (2) $-0. \dots$ (3) $-3. \dots$ (4) $-0. \dots$ (5) $1. \dots$

5. 右圖中四個正六邊形 Γ_1 、 Γ_2 、 Γ_3 、 Γ_4 的其中一邊恰為某個正方形的邊，已知 $A(0, 0)$ 、 $B(1, 0)$ ，試選出正確的選項。



(1) Γ_1 經由矩陣 $\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ -\sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$ 變換可得 Γ_2

(2) Γ_1 經由矩陣 $\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$ 變換可得 Γ_4

(3) Γ_1 經由矩陣 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 變換可得 Γ_2

(4) Γ_1 經由矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 變換可得 Γ_3

(5) Γ_1 經由矩陣 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 變換可得 Γ_4

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答：(1)(3)

解：(1) Γ_1 以 $(0,0)$ 為中心，旋轉 $-\frac{\pi}{6}$ 得 Γ_2 ，故合

(2) Γ_1 以 $(1,0)$ 為中心，旋轉 $\frac{\pi}{6}$ 得 Γ_4 ，故不合

(3) Γ_1 關於 $y=x$ 成對稱得 Γ_2 ，故合

(4) Γ_1 關於 $y=\frac{1}{2}$ 成對稱得 Γ_3 ，故不合

(5) Γ_1 關於 $y=-x+1$ 成對稱得 Γ_4 ，故不合

6. 直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角， $\overline{BC}=2$ ， $\overline{CA}=1$ ， P 是斜邊 $\overline{AB}$ 上的點，使得 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB}$ ，則下列哪些敘述是正確的？

(1) $\overline{CP} \perp \overline{AB}$ (2) $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 2$ (3) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{4}{5}$ (4) $\sin \angle ACP = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(5) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答：(1)(3)(5)

解：(1) $\overrightarrow{CP} \cdot (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Rightarrow \overline{CP} \perp \overline{AB}$

(2) $\overline{CA}=1$ ， $\overline{CB}=2 \Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{5}$

由直角 $\triangle$ 母子相似定理 $\Rightarrow \overline{AP} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ， $\overline{BP} = \frac{4}{\sqrt{5}}$ ， $\overline{CP} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

故 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 4$

(3) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CP} = |\overrightarrow{CP}|^2 = \frac{4}{5}$

(4) $\sin \angle ACP = \sin \angle ABC = \frac{1}{\sqrt{5}}$

(5) 所求 $= |\overrightarrow{CP}|^2 + 0 + |\overrightarrow{AP}|^2 = \frac{4}{5} + 0 + \frac{1}{5} = 1$

7. 三相異直線 L_1 、 L_2 、 L_3 ，若 L_2 、 L_3 交於 (p_1, q_1) ， L_1 、 L_3 交於 (p_2, q_2) ， L_1 、 L_2 交於 (p_3, q_3) ，當 L_1 向右平移 K 單位變為 L'_1 時， L'_1 、 L_3 交於 $(p_2 - 12, q_2 - 5)$ ， L'_1 、 L_2 交於 $(p_3 + 3, q_3 - 4)$ ，試選出正確的選項。

(1) L_2 的斜率為 $-\frac{3}{4}$ (2) L_3 的斜率為 $\frac{5}{12}$

(3) L_1 的斜率為 $\frac{1}{15}$ (4) 若 L_2 與 L_3 的銳夾角為 θ ，則 $\tan \theta = \frac{63}{16}$

(5) $K = 63$

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答：(2)(3)(4)(5)

解：(1) L_2 過 (p_3, q_3) 與 $(p_3 + 3, q_3 - 4) \Rightarrow L_2$ 斜率 $= \frac{-4}{3}$

(2) L_3 過 (p_2, q_2) 與 $(p_2 - 12, q_2 - 5) \Rightarrow L_3$ 斜率 $= \frac{5}{12}$

$$(3) L_1 \text{ 斜率} = L'_1 \text{ 斜率}, L_1 \text{ 過 } (p_2, q_2), (p_3, q_3)$$

$$L'_1 \text{ 過 } (p_2 - 12, q_2 - 5), (p_3 + 3, q_3 - 4)$$

$$\Rightarrow \frac{q_2 - q_3}{p_2 - p_3} = \frac{(q_2 - 5) - (q_3 - 4)}{(p_2 - 12) - (p_3 + 3)} \Rightarrow \frac{q_2 - q_3}{p_2 - p_3} = \frac{1}{15}$$

$$(4) \tan \theta = \left| \frac{\left(-\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{5}{12}\right)}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{12}\right)} \right| = \left| \frac{-48 - 15}{16} \right| = \frac{63}{16}$$

$$(5) L_1: (y - q_2) = \frac{1}{15}(x - p_2) \Rightarrow x - 15y = p_2 - 15q_2$$

$$L'_1: (y - q_2 + 5) = \frac{1}{15}(x - p_2 + 12) \Rightarrow (y - q_2) = \frac{1}{15}(x - p_2 - 63)$$

表 L 向右平移 $k = 63$ ，得 L'_1

8. 若 $f(a)$ 代表 $2 < |2x - 3| < \log a$ 的整數解個數，試選出正確的選項。

(1) $f(10) = 0$ (2) $f(2025) = 2$ (3) 若 a 為 7 位數，則 $f(a) = 4$

(4) 若 $f(a) = 4$ ，則 a 的最大整數值與最小整數值相差 $9.9 \times 10^6 - 1$

(5) $f(a)$ 可能為奇數

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答：(1)(2)(3)(4)

解：(5) $|2x - 3|$ 必為奇數， x 之解必為偶數 $\Rightarrow f(a)$ 為偶數

$$(1) 2 < |2x - 3| < \log 10 = 1 \Rightarrow \text{無解} \Rightarrow f(10) = 0$$

$$(2) 2 < |2x - 3| < \log 2025 = 3. \dots \Rightarrow |2x - 3| = 3 \Rightarrow x = 0 \text{ 或 } 3 \Rightarrow f(2025) = 2$$

$$(3) 2 < |2x - 3| < \log a \xrightarrow{6 \leq \log a < 7} |2x - 3| = 3, 5 \Rightarrow x = 0 \text{ 或 } 3 \text{ 或 } 2 \text{ 或 } -1$$

$$\Rightarrow f(a) = 4$$

$$(4) \xrightarrow{f(a) = 4} |2x - 3| = 3, 5 \Rightarrow 5 < \log a \leq 7 \Rightarrow 10^5 + 1 \leq a \leq 10^7$$

$$\text{所求} = \left(10^7\right) - \left(10^5 + 1\right) = 99 \times 10^5 - 1 = 9.9 \times 10^6 - 1$$

三、選填題

9. 社團有 6 個男學生及 6 個女學生預計出遊，後來統計出遊人數時，發現男生人數和女生人數相同（可能皆為 0 人），則共有_____種不同的出遊組合。

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答：924

$$\text{解：} C_0^6 C_0^6 + C_1^6 C_1^6 + C_2^6 C_2^6 + C_3^6 C_3^6 + C_4^6 C_4^6 + C_5^6 C_5^6 + C_6^6 C_6^6 = C_6^{12} = 924$$

10. 設 $f(x)$ 為 x 的三次多項式函數，且 $f(x) + f'(x) = 2x^3$ ，試求 $f(-1) =$ _____。

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答：-32

解： $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ， $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
 $f(x) + f'(x) = ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+2b)x + (d+c) = 2x^3$
 故 $\begin{cases} a=2 \\ b+3a=0 \\ c+2b=0 \\ d+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-6 \\ c=12 \\ d=-12 \end{cases}$ 故 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 12x - 12$
 $\Rightarrow f(-1) = -2 - 6 - 12 - 12 = -32$

11. 有一三角錐 $A-BCD$ ，其中 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = 10$ ， $\overline{CD} = 12$ ，

則 $\left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（化為最簡根式）

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

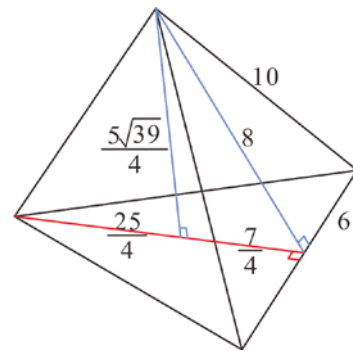
答： $120\sqrt{39}$

解： $\triangle BCD$ 之外接圓半徑 $R = \frac{25}{4}$

$$A-BCD \text{ 之高} = \frac{5\sqrt{39}}{4}$$

$$A-BCD \text{ 之體積} = \left(\frac{12 \times 8}{2} \right) \times \frac{5\sqrt{39}}{4} \times \frac{1}{3} = 20\sqrt{39}$$

$$\text{所求平行六面體體積} = 6 \times 20\sqrt{39} = 120\sqrt{39}$$



第貳部分：混合題或非選擇題

12-13 題為題組

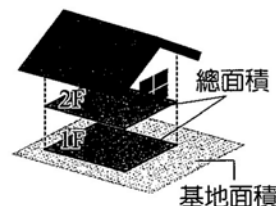
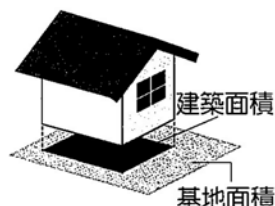
依照 S 市政府建築法規住宅區建築基地規定：

- (i) 「住一」建蔽率不得大於 60%，容積率不得大於 120%，惟建蔽率低於 50% 時，容積率不得大於 150%。
- (ii) 「住二」建蔽率不得大於 60%，容積率不得大於 150%，惟建蔽率低於 50% 時，容積率不得大於 180%。

其中「建蔽率」又稱建築密度或建築覆蓋率，指建築基地上，建築物的水平投影面積與建築基地面積的比值，簡單解釋為一塊空地可以蓋多少建築面積，其餘面積作為通路、綠化等等

公共空間，建蔽率 = $\frac{\text{建築面積}}{\text{基地面積}} \times 100(\%)$ 。而「容積率」是指建築物的總樓地板面積占基地

面積的比例，容積率 = $\frac{\text{總面積}}{\text{基地面積}} \times 100(\%)$ 。



若 $\triangle ABC$ 是地主老陳在 S 市一塊「住二」的建地，其三邊長分別為 70 公尺、80 公尺、90 公尺，且其內切圓與 $\triangle ABC$ 相切於 D 、 E 、 F 。試回答下列問題。

12. 設 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的外接圓半徑分別為 R_1 、 R_2 ，試求 $\frac{R_2}{R_1}$ 之值為何？

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答： $\frac{10}{21}$

$$\begin{aligned} \text{解： } \triangle ABC &= \sqrt{120 \cdot 50 \cdot 40 \cdot 30} = \frac{70 \times 80 \times 90}{4R_1} = R_2 \left(\frac{70+80+90}{2} \right) \\ \Rightarrow R_1 &= 21\sqrt{5}, R_2 = 10\sqrt{5} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

13. 地主老陳想要在 $\triangle DEF$ 上蓋一幢別墅，每個樓層的樓地板面積都跟 $\triangle DEF$ 的面積一樣大，請計算出建蔽率，再按照法規推估老陳的別墅最多可蓋幾層樓？

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

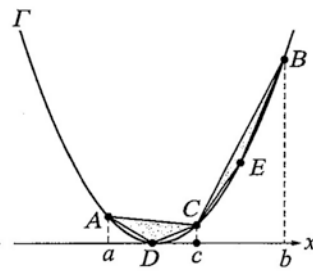
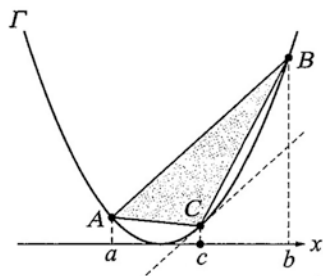
答：建蔽率 $\frac{5}{21}$ ，7 層

$$\begin{aligned} \text{解： } \triangle DEF &= \frac{1}{2} R_2^2 [\sin(180^\circ - A) + \sin(180^\circ - B) + \sin(180^\circ - C)] \\ &= \frac{1}{2} R_2^2 \left[\frac{70}{2R_1} + \frac{80}{2R_1} + \frac{90}{2R_1} \right] = \frac{2000}{7} \sqrt{5} \\ \text{又 } \triangle ABC &= 1200\sqrt{5} \Rightarrow \text{建蔽率} = \frac{\frac{2000}{7} \sqrt{5}}{1200\sqrt{5}} = \frac{5}{21} < 50\% \end{aligned}$$

$$\text{容積率} = \frac{\frac{2000}{7} \sqrt{5} \times t}{1200\sqrt{5}} \leq 180\% \Rightarrow t \leq \frac{189}{25} = 7.56$$

14-17 題為題組

在拋物線 $\Gamma: y = 4x^2$ 上有兩點 $A(a, 4a^2)$ 、 $B(b, 4b^2)$ ，其中 $b > a$ ，若以拋物線上一點 C 為切點之切線與 $\overline{AB}$ 平行，試回答下列問題。



14. C 點的 x 坐標為何？（單選題）

- (1) $a+b$ (2) $2(a+b)$ (3) $4(a+b)$ (4) $\frac{a+b}{2}$ (5) $\frac{a+b}{4}$

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答：(4)

解： $C(t, 4t^2)$ ， $y' = 8x$

$$m = y'|_{x=t} = 8t = \frac{4b^2 - 4a^2}{b-a} \Rightarrow t = \frac{b+a}{2}$$

15. 若以拋物線上一點 D 為切點的切線與 $\overline{AC}$ 平行，以拋物線上一點 E 為切點的切線與 $\overline{BC}$ 平行，試選出正確的選項。(多選題)

(1) D 點的 x 坐標為 $\frac{3a+b}{4}$

(2) E 點的 x 坐標為 $\frac{a+3b}{4}$

(3) $\triangle ABC$ 面積為 $\frac{(b-a)^3}{2}$

(4) $\triangle ACD$ 面積為 $\frac{(b-a)^3}{16}$

(5) $\frac{\triangle ACD \text{ 面積} + \triangle BCE \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}}$ 之值為 $\frac{1}{4}$

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答：(1)(2)(3)(4)(5)

解：(1) 承前題， D 之 x 坐標 $= \frac{a + \frac{b+a}{2}}{2} = \frac{3a+b}{4}$

(2) 承前題， E 之 x 坐標 $= \frac{b + \frac{b+a}{2}}{2} = \frac{a+3b}{4}$

$$\begin{aligned} (3) \triangle ABC \text{ 面積} &= \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} (b-a) & 4(b^2-a^2) \\ (t-a) & 4(t^2-a^2) \end{pmatrix} \right\| \\ &= 2(b-a)(t-a) \left\| \begin{matrix} 1 & b+a \\ 1 & t+a \end{matrix} \right\| = 2(b-a)(t-a)(b-t) \\ &= 2(b-a) \left(\frac{b+a}{2} - a \right) \left(b - \frac{b+a}{2} \right) = \frac{1}{2}(b-a)^3 \end{aligned}$$

$$(4) \text{ 承前項，} \triangle ACD \text{ 面積} = \frac{1}{2} \left(\frac{b+a}{2} - a \right)^3 = \frac{1}{16}(b-a)^3$$

$$(5) \text{ 承前項，} \triangle BCE \text{ 面積} = \frac{1}{2} \left(b - \frac{b+a}{2} \right)^3 = \frac{1}{16}(b-a)^3$$

$$\text{所求比例} = \frac{\frac{1}{16}(b-a)^3 + \frac{1}{16}(b-a)^3}{\frac{1}{2}(b-a)^3} = \frac{1}{4}$$

16. 利用 15. 的結論，重複以上步驟，若以拋物線上一點 F 為切點的切線與 $\overline{AD}$ 平行，

以拋物線上一點 G 為切點的切線與 $\overline{DC}$ 平行，以拋物線上一點 H 為切點的切線與 $\overline{CE}$ 平行，以拋物線上一點 I 為切點的切線與 $\overline{EB}$ 平行，……， Γ 和 $\overline{AB}$ 所圍區域面積視為無窮多個三角形的面積和，即 $\triangle ABC$ 面積 + ($\triangle ACD$ 面積 + $\triangle BCE$ 面積) + ($\triangle AFD$ 面積 + $\triangle DGC$ 面

積 + ΔCHE 面積 + ΔEIB 面積) +。試將 $\frac{\Gamma \text{ 和 } \overline{AB} \text{ 所圍區域面積}}{\Delta ABC \text{ 面積}}$ 表示為一無窮等比級數，並計算其值。

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答： $\frac{4}{3}$

解：承前題， $\Delta AFD = \Delta DGC = \Delta CHE = \Delta EIB$ 面積 = $\frac{1}{8} \Delta ACD$ 面積 = $\left(\frac{1}{8}\right)^2 \Delta ABC$ 面積

$$\text{故所求} = 1 + \frac{1}{8} \times 2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times 2^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 \times 2^3 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

17. 若 $a=0$ ， $b=1$ ，利用定積分的方法求出 Γ 和 $\overline{AB}$ 所圍區域面積之值。

【114 北北基分科模考數甲 A(5)】

答： $\frac{2}{3}$

解： $A(0,0)$ ， $B(1,4)$ ，所求 = $\frac{1 \times 4}{2} - \int_0^1 4x^2 dx = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

析：承前題， $\frac{4}{3} \times \left[\frac{1}{2}(1-0)^3 \right] = \frac{2}{3}$