數學甲考科 B 卷詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(1)	(5)	(1)(3)(5)	(1)(3)	(1)(3)(5)	(2)(3)(4)(5)
8.						
(1)(2)(3)(4)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (4)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：解決級數和的情境問題

解析：設一共有 n 層，且最上層有 x 塊積木，最下層有 $x+n-1$ 塊積木

則列方程式 $\dfrac{[x+(x-n+1)]\times n}{2}=52$

$\Rightarrow n(2x-n+1)=104=2^3\times13$

若 $n=2$，$x=\dfrac{51}{2}$，不合

若 $n=4$，$x=\dfrac{23}{2}$，不合

若 $n=8$，$x=3$

若 $n=13$，$x=-2$，不合

故選(4)。

2. (1)

出處：第四冊〈機率〉

目標：條件機率的定義

解析：四個數字相乘的結果是質數，則必有 3 個 1 與 1 個質數 (2 或 3 或 5 或 7)

其中 2 不可排在個位數

$\therefore$機率為 $\dfrac{\dfrac{4!}{3!}\times3+\dfrac{3!}{2!}}{\dfrac{10000-1000}{2}}=\dfrac{15}{4500}=\dfrac{1}{300}$，故選(1)。

3. (5)

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：空間中直線方程式的應用

解析：(1)╳：L_1 的方向向量為 $(0,0,1)$

又 $(2,-1,0)$ 不在此立方體的內部及邊界上

$\therefore L_1$ 與直線 AE 平行

$\Rightarrow L_1$ 與此立方體不相交

(2)╳：L_2 的方向向量為 $(0,-1,0)$

又 $(-2,0,3)$ 不在此立方體的內部及邊界上

$\therefore L_2$ 與直線 EF 平行

$\Rightarrow L_2$ 與此立方體不相交

(3)╳：平面 $z=\dfrac{5}{2}$ 與平面 $EFGH$ 平行

又 L_3 在平面 $z=\dfrac{5}{2}$ 上

$\Rightarrow L_3$ 與此立方體不相交

(4)╳：平面 $x+y+z=6$ 和此立方體僅交於點 $(2,2,2)$

但點 $(2,2,2)$ 不在平面 $y=1$ 上

$\Rightarrow L_4$ 和此立方體不相交

(5)○：L_5 可寫成 $\begin{cases}x=2+2t\\y=3+3t\\z=4+4t\end{cases}$，$t$ 為實數

點 $(2,3,4)$ 在 L_5 上，根據 $(2,3,4)$ 位置可知

L_5 可能和平面 $ABFE$、平面 $BCGF$、平面 $EFGH$ 其中之一相交

又 D 在 L_5 上

$\therefore L_5$ 必穿過此立方體內部

故選(5)。

二、多選題

4. (1)(3)(5)

出處：選修數學甲〈分布與統計〉

目標：二項分布、幾何分布

解析：(1)○：連開十包均開出「翰林小子」的機率為 0.2^{10}

(2)╳：開到第十包才開出「翰林小子」的機率為 $0.8^9\times0.2$

(3)○：連開十包開出 2 張「翰林小子」的機率為 $C_2^{10}\,0.2^2\times0.8^8=0.2\times0.8^8\times9$

連開十包開出 1 張「翰林小子」的機率為 $C_1^{10}\,0.2^1\times0.8^9=0.2\times0.8^8\times8$

故開出 2 張的機率大於開出 1 張的機率

(4)╳：$X\sim B(100,0.2)$，故 X 的標準差為 $\sqrt{100\times0.2\times0.8}=\sqrt{16}=4$ 張

(5)○：$Y\sim G(0.2)$，故 Y 的期望值為 $\dfrac{1}{0.2}=5$ 包

故選(1)(3)(5)。

5. (1)(3)

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：線性變換的定義

解析：(1)○：$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6}\\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}$ 代表以 $A(0,0)$ 為中心，順時針方向旋轉 $\dfrac{\pi}{6}$

而 Γ_2 是由 Γ_1 以 $A(0,0)$ 為中心，順時針方向旋轉 $\dfrac{\pi}{6}$ 而得

(2)╳：$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}$ 代表以 $A(0,0)$ 為中心，逆時針方向旋轉 $\dfrac{\pi}{6}$

但 Γ_4 是由 Γ_1 以 $B(1,0)$ 為中心，逆時針方向旋轉 $\dfrac{\pi}{6}$ 而得

(3)○：$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 代表對 $y=x$ 作鏡射

而 Γ_2 是由 Γ_1 對 $y=x$ 作鏡射而得

(4)╳：$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 代表對 x 軸作鏡射

而 Γ_3 是由 Γ_1 對 $y=\dfrac{1}{2}$ 作鏡射而得

(5) ╳：$\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$代表對 $y=-x$ 作鏡射

而 Γ_4 是由 Γ_1 對 $y=-x+1$ 作鏡射而得

故選(1)(3)。

6. (1)(3)(5)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：內積的運算

解析：(1) ○：$\because \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}$

$\therefore \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})$

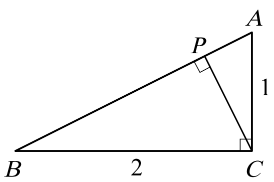
$=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

故 $\overline{CP}\perp\overline{AB}$

(2) ╳：斜邊 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AP}:\overline{PB}=(\overline{AC}\cos A):(\overline{BC}\cos B)$

$=\left(1\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right):\left(2\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=1:4$



(3) ○：$\because \overline{CP}\perp\overline{AB}$

$\therefore \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CP}=\overline{CP}\cdot\overline{CP}=\left(\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2$

$=\left(\dfrac{1\times2}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{4}{5}$

(4) ╳：$\because \angle ACP=\angle B$

$\therefore \sin\angle ACP=\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(5) ○：$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\overline{CP}\cdot\overline{CP}+0+\overline{AP}\cdot\overline{AP}$

$=\overline{CP}^2+\overline{AP}^2=\overline{AC}^2=1$

故選(1)(3)(5)。

7. (2)(3)(4)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈三角函數〉

目標：斜率的應用

解析：(1) ╳：L_2 過 (p_3, q_3) 及 (p_3+3, q_3-4)

$\therefore L_2$ 的斜率為 $\dfrac{q_3-4-q_3}{p_3+3-p_3}=-\dfrac{4}{3}$

(2) ○：L_3 過 (p_2, q_2) 及 (p_2-12, q_2-5)

$\therefore L_3$ 的斜率為 $\dfrac{q_2-5-q_2}{p_2-12-p_2}=\dfrac{5}{12}$

(3) ○：L_1 過 (p_2, q_2) 及 (p_3, q_3)

L_1' 過 (p_2-12, q_2-5) 及 (p_3+3, q_3-4)

$\because L_1$ 的斜率$=L_1'$的斜率

$\therefore \dfrac{q_2-q_3}{p_2-p_3}=\dfrac{(q_2-5)-(q_3-4)}{(p_2-12)-(p_3+3)}$

$=\dfrac{(q_2-q_3)-1}{(p_2-p_3)-15}$

$\Rightarrow \dfrac{q_2-q_3}{p_2-p_3}=\dfrac{1}{15}$

(4) ○：設 L_2 的斜率為 m_2，L_3 的斜率為 m_3，

則 $|\tan\theta|=\left|\dfrac{m_2-m_3}{1+m_2m_3}\right|=\left|\dfrac{-\frac{4}{3}-\frac{5}{12}}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{5}{12}}\right|$

$=\dfrac{63}{16}$

(5) ○：$L_1: y-q_2=\dfrac{1}{15}(x-p_2)$

$L_1': y-(q_2-5)=\dfrac{1}{15}[x-(p_2-12)]$

$\Rightarrow y-q_2=\dfrac{1}{15}(x-p_2)-\dfrac{21}{5}$，

即 $y-q_2=\dfrac{1}{15}(x-p_2-63)$

$\therefore K=63$

故選(2)(3)(4)(5)。

8. (1)(2)(3)(4)

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈指數、對數〉

目標：絕對值不等式、常用對數的意義

解析：(1) ○：$f(10)$ 代表 $2<|2x-3|<\log 10$ 的整數解個數，

又 $\log 10=1$

$\therefore f(10)=0$

(2) ○：$f(2025)$ 代表 $2<|2x-3|<\log 2025$ 的整數解個數，又 $3<\log 2025<4$

$\therefore |2x-3|=3\Rightarrow x=0$ 或 3

故 $f(2025)=2$

(3) ○：$f(a)$ 代表 $2<|2x-3|<\log a$ 的整數解個數，

又 $6\leq\log a<7$

$\therefore |2x-3|=3$ 或 5

($\because x$ 為整數　$\therefore |2x-3|$ 必為奇數)

$\Rightarrow x=0$ 或 3 或 4 或 -1

故 $f(a)=4$

(4) ○：$\because |2x-3|$ 為奇數

$\therefore f(a)=4$ 時，$|2x-3|=3$ 或 5

因此 $5<\log a\leq 7$

a 的最大整數值為 10^7，最小整數值為 10^5+1

兩者相差 $10^7-10^5-1=99\times10^5-1$

$=9.9\times10^6-1$

(5) ╳：若 x 為整數，則 $|2x-3|$ 也為整數，

又 $|2x-3|\neq0$

故 $2x-3$ 有兩個不同的值 (互為相反數)，

$\therefore f(a)$ 必為偶數

故選(1)(2)(3)(4)。

三、選填題

9. 924

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：組合在生活中的應用

解析：男生人數可能有 0 人，1 人，……，6 人

∴出遊組合有

$C_0^6C_0^6+C_1^6C_1^6+C_2^6C_2^6+C_3^6C_3^6+C_4^6C_4^6+C_5^6C_5^6+C_6^6C_6^6$

$=1+36+225+400+225+36+1=924$ (種)。

〈另解〉

由 $(1+x)^6 = C_0^6x^6 + C_1^6x^5 + C_2^6x^4 + C_3^6x^3 + C_4^6x^2 + C_5^6x + C_6^6 \cdots\cdots①$

$(x+1)^6 = C_0^6 + C_1^6x + C_2^6x^2 + C_3^6x^3 + C_4^6x^4 + C_5^6x^5 + C_6^6x^6 \cdots\cdots②$

$\therefore (1+x)^{12}$ 展開式的 x^6 項的係數與①×②中的 x^6 項係數相同

故所求為 $C_0^6C_0^6 + C_1^6C_1^6 + C_2^6C_2^6 + C_3^6C_3^6 + C_4^6C_4^6 + C_5^6C_5^6 + C_6^6C_6^6 = C_6^{12} = 924$ (種)。

10. 16

出處：選修數學甲〈複數平面〉

目標：複數的幾何意涵

解析：設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $0^\circ<\theta<90^\circ$

則 $iz=(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)\times r(\cos\theta+i\sin\theta)$

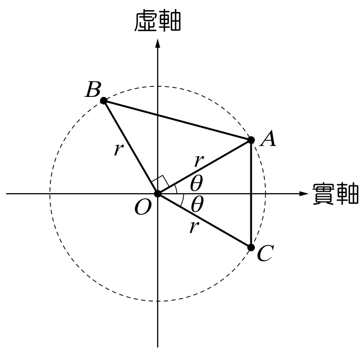
$=r(\cos(90^\circ+\theta)+i\sin(90^\circ+\theta))$

$\overline{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

可知 $A(r\cos\theta, r\sin\theta)$，$B(r\cos(90^\circ+\theta), r\sin(90^\circ+\theta))$，$C(r\cos(-\theta), r\sin(-\theta))$

如下圖，$\triangle OAB$ 的面積為 $\frac{1}{2}r^2$，

$\triangle OAC$ 的面積為 $\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta$



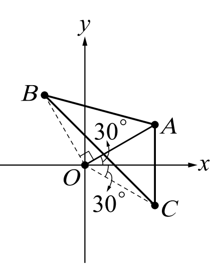
依題意可知 $\frac{1}{2}r^2=32$，故 $r=8$

且 $\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta=16\sqrt{3}$，故 $\sin 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

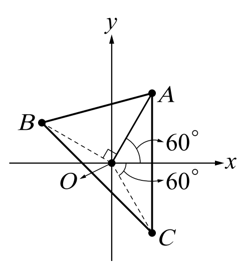
可知 $\theta=30^\circ$ 或 60°

當 $\theta=30^\circ$ 時，如圖㈠

當 $\theta=60^\circ$ 時，如圖㈡



圖㈠



圖㈡

故 $\triangle OBC$ 的面積為 $\frac{1}{2}r^2\sin 150^\circ=16$。

11. $120\sqrt{39}$

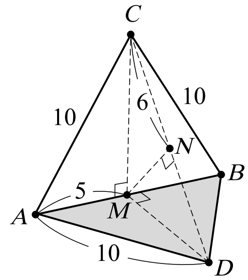
出處：第四冊〈空間向量〉

目標：利用空間概念求三角錐體積

解析：$|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=$(三角錐 $A-BCD$ 的體積)×6

$=$(三角錐 $C-ABD$ 的體積)×6

如下圖所示



取 $\overline{AB}$ 中點 M，則 $\overline{CM}=\overline{DM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 10=5\sqrt{3}$，

三角錐 $C-ABD$ 的高即為 $\triangle CDM$ 中，$\overline{DM}$ 上的高 h

取 $\overline{CD}$ 中點 N，則 $\overline{MN}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2-6^2}=\sqrt{39}$

$\therefore \frac{1}{2}\times 12\times\sqrt{39}=\frac{1}{2}\times 5\sqrt{3}\times h \Rightarrow h=\frac{12\sqrt{13}}{5}$

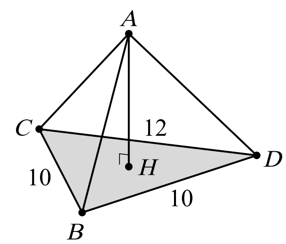
故 $|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|$

$=\frac{1}{3}\times\triangle ABD$ 面積 $\times h\times 6$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 10^2\right)\times\frac{12\sqrt{13}}{5}\times 6=120\sqrt{39}$。

〈另解〉

令 A 作垂線交 $\triangle BCD$ 的垂足為 H



$\because \overline{AC}=\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{AH}$ 為共用邊且 $\overline{AH}\perp\triangle BCD$

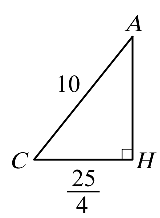
$\therefore \triangle ACH\cong\triangle ADH\cong\triangle ABH$

$\Rightarrow H$ 為 $\triangle BCD$ 的外心

又 $\triangle BCD$ 的面積為 $\sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)}$

$=\sqrt{16\times 6\times 6\times 4}=48$

故 $\triangle BCD$ 的外接圓半徑為 $\frac{10\times 10\times 12}{4\times 48}=\frac{25}{4}$



$\overline{AH}=\sqrt{10^2-\left(\frac{25}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{39}}{4}$

故三角錐 $A-BCD$ 的體積為 $\frac{1}{3}\times 48\times\frac{5\sqrt{39}}{4}=20\sqrt{39}$

故所求為 $6\times 20\sqrt{39}=120\sqrt{39}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. $\frac{10}{21}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：三角比的應用

解析：$\triangle ABC$ 的半周長 $s=\frac{70+80+90}{2}=120$，

面積為 $\sqrt{120(120-70)(120-80)(120-90)}$

$=1200\sqrt{5}$ (平方公尺)

設$\triangle ABC$ 的內切圓圓心 O

$\because$ $\overline{OD}$ 、 $\overline{OE}$ 、 $\overline{OF}$ 為內切圓半徑且與$\triangle ABC$ 的三邊垂直

$\therefore$內切圓半徑$=\frac{\triangle ABC\text{面積}}{s}$

$=\frac{1200\sqrt{5}}{120}$

$=10\sqrt{5}$

令$\triangle ABC$ 的三邊長為 a、b、c

$\therefore$外接圓半徑 $R_1=\frac{abc}{4\times\triangle ABC\text{面積}}=\frac{70\times80\times90}{4\times1200\sqrt{5}}$

$=21\sqrt{5}$

又$\triangle DEF$ 的外接圓即為$\triangle ABC$ 的內切圓

$\therefore R_2=10\sqrt{5}$

故 $\frac{R_2}{R_1}=\frac{10\sqrt{5}}{21\sqrt{5}}=\frac{10}{21}$ 。

◎評分原則

$\triangle ABC$ 的半周長 $s=\frac{70+80+90}{2}=120$，

面積為 $\sqrt{120(120-70)(120-80)(120-90)}$

$=1200\sqrt{5}$ (平方公尺)　(1 分)

設$\triangle ABC$ 的內切圓圓心 O

$\because$ $\overline{OD}$ 、 $\overline{OE}$ 、 $\overline{OF}$ 為內切圓半徑且與$\triangle ABC$ 的三邊垂直

$\therefore$內切圓半徑$=\frac{\triangle ABC\text{面積}}{s}$

$=\frac{1200\sqrt{5}}{120}$

$=10\sqrt{5}$　(1 分)

令$\triangle ABC$ 的三邊長為 a、b、c

$\therefore$外接圓半徑 $R_1=\frac{abc}{4\times\triangle ABC\text{面積}}=\frac{70\times80\times90}{4\times1200\sqrt{5}}=21\sqrt{5}$

(1 分)

又$\triangle DEF$ 的外接圓即為$\triangle ABC$ 的內切圓

$\therefore R_2=10\sqrt{5}$　(1 分)

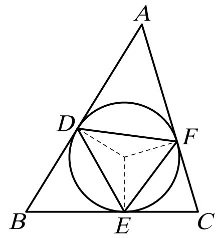
故 $\frac{R_2}{R_1}=\frac{10\sqrt{5}}{21\sqrt{5}}=\frac{10}{21}$ 。　(1 分)

13. 建蔽率 $\frac{5}{21}$ ，7 層

出處：第二冊〈三角比〉

目標：三角比的應用

解析：



承 12.，$\triangle DEF$ 的面積$=\frac{1}{2}\cdot R_2^2\sin(180^\circ-A)$

$+\frac{1}{2}\cdot R_2^2\sin(180^\circ-B)$

$+\frac{1}{2}\cdot R_2^2\sin(180^\circ-C)$

$=\frac{R_2^2}{2}(\sin A+\sin B+\sin C)$

$=\frac{R_2^2}{2}\left(\frac{a}{2R_1}+\frac{b}{2R_1}+\frac{c}{2R_1}\right)$

$=\frac{R_2^2}{2R_1}\times\frac{a+b+c}{2}$

$=\frac{R_2}{2R_1}\times R_2 s$

$=\frac{R_2}{2R_1}\times\triangle ABC$ 面積

由於建蔽率$=\frac{\triangle DEF\text{ 面積比}}{\triangle ABC\text{ 面積比}}=\frac{R_2}{2R_1}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{21}=\frac{5}{21}<50\ \%$

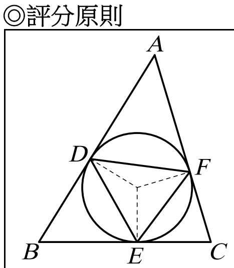
$\therefore$容積率 $\leq\triangle ABC$ 面積$\times180\ \%=2160\sqrt{5}$ (平方公尺)

又 $\frac{\text{室內樓地板最大總面積}}{\text{建築面積}}=\frac{2160\sqrt{5}}{\triangle DEF\text{ 面積}}$

$=\frac{2160\sqrt{5}}{\frac{5}{21}\times1200\sqrt{5}}=7.56$

$\Rightarrow$ 最多可蓋 7 層。

◎評分原則



承 12.，$\triangle DEF$ 的面積$=\frac{1}{2}\cdot R_2^2\sin(180^\circ-A)$

$+\frac{1}{2}\cdot R_2^2\sin(180^\circ-B)$

$+\frac{1}{2}\cdot R_2^2\sin(180^\circ-C)$　(1 分)

$=\frac{R_2^2}{2}(\sin A+\sin B+\sin C)$

$=\frac{R_2^2}{2}\left(\frac{a}{2R_1}+\frac{b}{2R_1}+\frac{c}{2R_1}\right)$　(1 分)

$=\frac{R_2^2}{2R_1}\times\frac{a+b+c}{2}$

$=\frac{R_2}{2R_1}\times R_2 s$

$=\frac{R_2}{2R_1}\times\triangle ABC$ 面積　(1 分)

由於建蔽率 $=\dfrac{\triangle DEF\text{ 面積比}}{\triangle ABC\text{ 面積比}}=\dfrac{R_2}{2R_1}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10}{21}=\dfrac{5}{21}<50\%$　(1 分)

$\therefore$ 容積率 $\le \triangle ABC$ 面積 $\times 180\% = 2160\sqrt{5}$ (平方公尺)

又 $\dfrac{\text{室內樓地板最大總面積}}{\text{建築面積}}=\dfrac{2160\sqrt{5}}{\triangle DEF\text{ 面積}}$

$=\dfrac{2160\sqrt{5}}{\frac{5}{21}\times 1200\sqrt{5}}=7.56$

$\Rightarrow$ 最多可蓋 7 層。　(1 分)

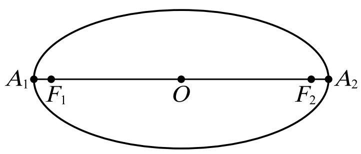
14. (3)

出處：選修數學甲〈二次曲線〉

目標：找出橢圓中心與焦點之間的距離

解析：如下圖，令 F_1，F_2 為橢圓的兩焦點

不失一般性，設太陽位於 F_1，O 為橢圓中心



則近日點與遠日點分別為橢圓長軸上的頂點 A_1，A_2

令 $\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=a$，$\overline{OF_1}=\overline{OF_2}=c$

依題意可知 $\overline{A_1F_1}=2=a-c$，$\overline{A_2F_1}=32=a+c$

可得 $a=17$，$c=15$

故橢圓中心與太陽之間的距離 $\overline{OF_1}=15$

故選(3)。

15. (2)(3)(5)

出處：選修數學甲〈二次曲線〉

目標：判斷橢圓相關敘述正確性

解析：(1) ╳：承 14.，依題意可知長軸在 x 軸上，短軸在 y 軸上，中心為原點

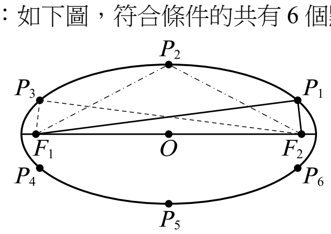
長軸長之半為 17，短軸長之半為 $\sqrt{17^2-15^2}=8$

故橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{289}+\dfrac{y^2}{64}=1$

(2) ○：橢圓的焦點為 $F_1(-15\ ,0)$，$F_2(15\ ,0)$

(3) ○：承(1)，中心為原點，短軸在 y 軸上，短軸長之半為 8，故短軸頂點為 $(0\ ,8)$，$(0\ ,-8)$

(4) ╳：如下圖，符合條件的共有 6 個點



其中 $\overline{F_1F_2}=\overline{P_1F_1}=\overline{P_3F_2}=\overline{P_4F_2}=\overline{P_6F_1}$，

$\overline{P_2F_1}=\overline{P_2F_2}=\overline{P_5F_1}=\overline{P_5F_2}$

(5) ○：已知 $\overline{F_1F_2}=30$，若橢圓上一點 P 與 F_1，F_2 形成正三角形

則 $\overline{PF_1}=\overline{PF_2}=30$，但依橢圓的性質可知

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=34$

故同時滿足兩條件的 P 點不存在

故選(2)(3)(5)。

16. $\dfrac{128}{19}$ 單位

出處：選修數學甲〈二次曲線〉

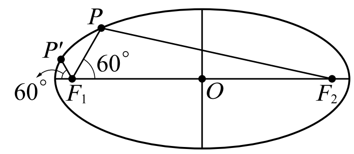
目標：橢圓的性質

解析：如下圖，令 F_1，F_2 為橢圓的兩焦點，不失一般性

設太陽位於 F_1，$\overline{F_1F_2}=30$

$\overline{PF_1}$，$\overline{P'F_1}$ 均與長軸夾 60° 角

但 P' 到短軸的距離沒有小於 F_1 到短軸的距離



故設行星所在位置為 P 點，$\overline{PF_1}=x$

由橢圓的性質可知，$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=34$，故 $\overline{PF_2}=34-x$

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$\overline{PF_2}^2=\overline{PF_1}^2+\overline{F_1F_2}^2-2\times\overline{PF_1}\times\overline{F_1F_2}\times\cos 60^\circ$

$\Rightarrow (34-x)^2=x^2+30^2-30x$

$\Rightarrow x^2-68x+1156=x^2-30x+900$

$\Rightarrow 38x=256$

$\Rightarrow x=\dfrac{128}{19}$ (單位)。

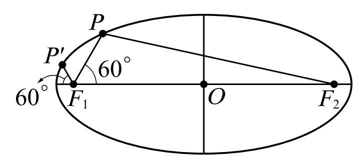
◎評分原則

如下圖，令 F_1，F_2 為橢圓的兩焦點，不失一般性

設太陽位於 F_1，$\overline{F_1F_2}=30$

$\overline{PF_1}$，$\overline{P'F_1}$ 均與長軸夾 60° 角

但 P' 到短軸的距離沒有小於 F_1 到短軸的距離



故設行星所在位置為 P 點，$\overline{PF_1}=x$

由橢圓的性質可知，$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=34$，故 $\overline{PF_2}=34-x$

(1 分)

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$\overline{PF_2}^2=\overline{PF_1}^2+\overline{F_1F_2}^2-2\times\overline{PF_1}\times\overline{F_1F_2}\times\cos 60^\circ$

(1 分)

$\Rightarrow (34-x)^2=x^2+30^2-30x$

$\Rightarrow x^2-68x+1156=x^2-30x+900$

$\Rightarrow 38x=256$

$\Rightarrow x=\dfrac{128}{19}$ (單位)。　(2 分)

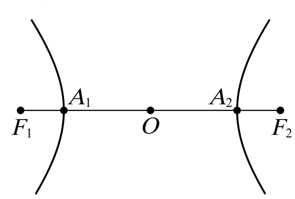
17. $\dfrac{x^2}{100}-\dfrac{y^2}{125}=1$

出處：選修數學甲〈二次曲線〉

目標：試求與橢圓共焦點的雙曲線方程式

解析：如下圖，已知焦點為 $F_1(-15\ ,0)$，$F_2(15\ ,0)$，

中心 $O(0\ ,0)$



A_1，A_2 為雙曲線的頂點，不失一般性，設太陽位於 F_1。

依題意可知 $\overline{A_1F_1}=5$，故可知 $A_1(-10\ ,0)$，$A_2(10\ ,0)$

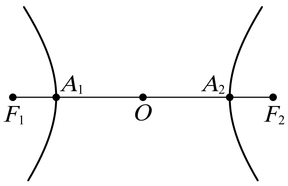
則雙曲線貫軸長為 $\overline{A_1A_2}=20$，貫軸長之半為 10

共軛軸長之半為 $\sqrt{15^2-10^2}=5\sqrt{5}$

故雙曲線方程式為 $\dfrac{x^2}{100}-\dfrac{y^2}{125}=1$ 。

◎評分原則

如下圖，已知焦點為 $F_1(-15\ ,\ 0)$，$F_2(15\ ,\ 0)$，中心 $O(0\ ,\ 0)$



A_1，A_2 為雙曲線的頂點，不失一般性，設太陽位於 F_1。

依題意可知 $\overline{A_1F_1}=5$，故可知 $A_1(-10\ ,\ 0)$，$A_2(10\ ,\ 0)$

則雙曲線貫軸長為 $\overline{A_1A_2}=20$，貫軸長之半為 10 (1 分)

共軛軸長之半為 $\sqrt{15^2-10^2}=5\sqrt{5}$ (1 分)

故雙曲線方程式為 $\dfrac{x^2}{100}-\dfrac{y^2}{125}=1$ 。 (1 分)