臺中區國立高級中學 104 學年度指定科目第二次聯合模擬考
數學甲


RA597

第壹部分：選擇題

一、單選題(占 24 分)

1. 園遊會中有一遊戲為投擲兩顆公正的正八面體骰子，每顆各面的點數皆為 1 點至 8 點，每顆都以靜止時朝上那一面的點數當作擲出的點數，當擲出的兩個點數相同或為連續數(例如：4 點與 5 點)時遊戲就結束，否則就繼續下一次投擲。若主辦單位希望每一位玩者投擲次數不超過 n 次(含恰好投擲 n 次)的機率大於 0.95，則此 n 之最小值為何？
   (已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ，$\log 3 \approx 0.4771$ ，$\log 7 \approx 0.8451$)
   (1) 6　(2) 8　(3) 10　(4) 12　(5) 14

2. 滿足行列不等式 $\begin{vmatrix} \log x^2-2 & -2 & -2 \\ -1 & \log x^2-3 & -1 \\ 2 & 4 & \log x^2+2 \end{vmatrix} \le 0$ 的整數 x 共有幾個？
   (1) 13　(2) 14　(3) 15　(4) 16　(5) 17

3. 已知 $r \neq 0$ ，使得無窮等比級數 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ 之值收斂，且極限值為 7 的整數 a 有幾個？
   (1) 10 個　(2) 11 個　(3) 12 個　(4) 13 個　(5) 14 個

4. 坐標平面上過點 $A(1,2)$ 可以向圓 $\Gamma: x^2+y^2+2x-4y+k-2=0$ 引出兩條切線，其中 k 為整數，請選出正確的選項。
   (1) 滿足上式的 k 有 5 個　(2) 所有滿足上式的 k 的總和是 15
   (3) 所有滿足上式的 k 中，最小的是 5　(4) 所有滿足上式的 k 的平均是 6
   (5) 所有滿足上式的 k 中，奇數與偶數的個數相同

二、多選題(占 40 分)

5. 對於正整數 n，設 $(1+2i)^n = a_n + ib_n$ ，其中 $i=\sqrt{-1}$ 且 a_n、b_n 為實數。從恆等式 $(1+2i)^{n+1}=(1+2i)^n(1+2i)$ 可推得 a_n、b_n 會滿足矩陣乘法 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ ，已知原點 O 與 P、Q 形成一個邊長為 2 的正△OPQ，其中 P 點在 x 軸正向，Q 點在第一象限，若矩陣 T 所定義的線性變換將平面上 P、Q 兩點分別映射到點 P'、Q' ，請選出下列正確的選項。
   (1) $\triangle OP'Q'$ 亦為正三角形　(2) P' 與 Q' 兩點分別在第一象限與第二象限
   (3) OPQ' 的面積為 $2+\sqrt{3}$　(4) 原點 O 到直線 $\overleftrightarrow{P'Q'}$ 的距離為 $2\sqrt{15}$
   (5) $\triangle OP'Q'$ 的重心坐標為 $(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2+\frac{\sqrt{3}}{3})$

6. 已知函數 $f(x)=2\sin x\cos x-2\sin^2 x+1$ ，則下列敘述哪些正確？
   (1) $f(x)$ 的最小正週期為 π　(2) $f(x)=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-2x)$
   (3) $y=f(x)$ 是將 $y=\sqrt{2}\sin 2x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{4}$
   (4) $f(x)$ 在區間 $[\frac{\pi}{24},\frac{\pi}{4}]$ 之最大值為 $\frac{\sqrt{6}}{2}$　(5) $f(x)$ 在區間 $[\frac{\pi}{24},\frac{\pi}{4}]$ 之最小值為 1

7. 已知 n 與 m 均為大於 1 的正整數，設箱中有 n 支籤，其中只有一支中獎籤。現在從箱中隨機抽出一支，取後放回，這樣連續操作 m 次。定義：$X_i = \begin{cases} 1, 第i次中籤 \\ 0, 第i次不中籤 \end{cases} (1 \le i \le m)$ ，
   隨機變數 $X = X_1+X_2+\cdots+X_m$ ，則下列敘述哪些正確？

(1) $X=k$ 的機率 $P(X=k)=\dfrac{m!}{(m-k)!k!n^k}$ (其中 $0\le k\le m$，k 為整數)

(2) X 的變異數 $Var(X)=\dfrac{m(n-1)}{n^2}$　　　(3) X^2 的期望值 $E(X^2)=\dfrac{m^2+(n-1)m}{n^2}$

(4) 使得 $Var(X)>2$ 成立的最少次數 $m=2n+3$

(5) 使得 $E(X^2)>2$ 成立的最少次數 $m=n+1$

8. 右圖為 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 的圖形，即 $y=f'(x)$，其中 O 為原點，a、e、c 為 $y=f'(x)$ 與 x 軸交點的 x 坐標，$f'(b)$ 為極大值，$f'(d)$ 為極小值，則下列有關函數 $f(x)$的敘述哪些正確？

(1) 當 $a<x<b$ 及 $d<x<e$ 時，$f(x)$為遞增，且當 $b<x<d$ 時，$f(x)$為遞減

(2) 當 $a<x<c$ 及 $x>e$ 時，$f(x)$為遞增，且當 $x<a$ 與 $c<x<e$ 時，$f(x)$為遞減

(3) 當 $a<x<b$ 及 $d<x<e$ 時，$f(x)$的圖形凹口向上，且當 $b<x<d$ 時，$f(x)$的圖形凹口向下

(4) $(b, f(b))$與$(d, f(d))$兩點皆為函數 $y=f(x)$圖形之反曲點

(5) $f(a)$與 $f(e)$為函數 $y=f(x)$之極大值，$f(c)$為函數 $y=f(x)$之極小值

9. 設多項式 $f(x)$為 n 次多項式(其中 $n\ge 3$)，若以 $(x-a)(x-b)$、$(x-b)(x-c)$、$(x-c)(x-a)$ 除 $f(x)$所得的餘式分別為 $2x+3$、$3x-1$、$x+1$，則下列選項哪些是正確？

(1) $a-b+c=-3$　　(2) $f(a)=-1$

(3) $(x-a)(x-b)$ 除 $(x^2+x-1)f(x)$ 之餘式為 $7x+11$

(4) $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除 $f(x)$的餘式為 $\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$

(5) 若 $n=3$，$f(2)=\dfrac{1}{3}$，則 $f(3)=\dfrac{11}{3}$

二、選填題(占 12 分)

A. 平原上有 A、B、C 三個小鎮，坐標分別為 $A(-1,-5)$，$B(4,10)$，$C(-10,8)$，現要在平原上新闢若干條筆直的公路，若希望每一條公路與此三個小鎮的距離都相同(但不同公路與小鎮的距離可能不同)，則由這些新闢公路所圍成的區域面積為______________。

B. 設 $f(x)=x^2+\int_0^1 xf(t)dt+\int_{-1}^2 f(t)dt$，則 $\int_0^1 f(x)dx=$__________。(化為最簡分數)

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

一、(1) 試求方程式 $z^3=-1$ 的虛根(以極式的型式表示)？(4 分)

(2) 承(1)，複數平面上，若複數 z 為 $z^3=-1$ 的虛根，點 P 為 $|z'-(1+i)|=2$ 上任一點，點 Q 的複數表示法為 $z'z$，點 R 的複數表示法為 $z'z^2$，試求△PQR 面積的最大值。(8 分)

二、設曲線 $y=x^3-5x+2$ 與 $y=ax$ 恰有兩個交點，則：

(1) 實數 $a=$？(6 分)

(2) 由上述兩曲線所圍成的區域面積為何？(6 分)

RA597 (臺中區國立高級中學 104 學年度指定科目第二次聯合模擬考數學甲)

選擇題：1. (2)　2. (4)　3. (3)　4. (2)　5. (1)(2)(3)(5)　6. (1)(2)(5)　7. (2)(3)(5)　8. (2)(3)(4)
9.(2)(4)

選填題：A. 25　B. $-\frac{14}{15}$

非選題：一、(1) $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ 或 $\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$　(2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sqrt{6}$

二、(1) -2　(2) $\frac{27}{4}$