臺中市立高級中等學校 105 學年度指定科目第三次
聯合模擬考　數學甲

RA598

第壹部分：選擇題(占 76 分)

一、單選題(占 24 分)

1.(　　) 在複數平面上

(a)以三個複數 0、8、$(1+\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi)$ 為頂點的三角形面積為 p

(b)以 $4+4\sqrt{3}i$ 的三次方根為三個頂點的三角形面積為 q

(c)設複數 z_1、z_2 滿足 $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$ 且 $\frac{z_1}{z_2}=i$，以 0、z_1、z_2 為頂點的三角形面積為 r

下列選項何者正確？

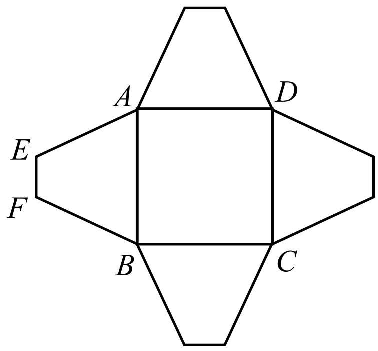
(1) $p<q<r$　(2) $q<p<r$　(3) $r<q<p$　(4) $q<r<p$　(5) $p<r<q$

2.(　　) 設圓 $C_1:(x+1)^2+(y-6)^2=5$，過圓 C_1 外一點 $P(2,7)$射出一斜率為正的雷射光線 L_1 與圓 C_1 相切。當 L_1 碰到 x 軸後依光學原理(入射角=反射角)產生反射光線 L_2，若圓 $C_2:(x+2)^2+(y-4)^2=5$ 分別與 L_1 交 a 個點、與 L_2 交 b 個點，則 a+b 之值為？

(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 3　(5) 4

3.(　　) 圖(1)為正四角錐台的展開圖，展開圖中 ABCD 為正方形及四個全等的等腰梯形，$\overline{AB}=6$、$\overline{AE}=\overline{BF}=5$、$\overline{EF}=2$，則正四角錐台中，$\overline{EF}$ 所在的直線與 $\overline{CD}$ 所在的直線的距離為？

(1) $\sqrt{38}$　(2) $\sqrt{37}$　(3) $\sqrt{35}$　(4) $\sqrt{34}$　(5) $\sqrt{33}$



圖(1)

4.(　　) 函數 $f(x)=a\sin(bx)$ $(a>0$ 且 $b>0)$的圖形中，若取相鄰的兩個最高點及一個最低點，可形成正三角形，則 ab 之值最接近下列哪一個數？($\sqrt{2}\approx1.414$、$\sqrt{3}\approx1.732$、$\sqrt{5}\approx2.236$、$\pi\approx3.14$)

(1) 2.6　(2) 2.7　(3) 2.8　(4) 2.9　(5) 3.0

二、多選題(占 24 分)

5.(　　) 在空間坐標系中，有兩歪斜線 $L_1: x=y=z+k$、$L_2:\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$ 及一平面 $E: ax+y-2z=2$。已知 L_1 為平面 E 上的一條直線，且平面 F 為平面 E 以直線 L_1 為中心軸旋轉 θ 角所得的平面($0<\theta<\frac{\pi}{2}$)，其中平面 F 與直線 L_2 不相交，則下列哪些選項是正確的？

(1) $k=-1$　(2) $a=1$　(3) 直線 L_2 與平面 E 交一點，且此點坐標值皆為整數

(4) $\cos\theta$ 之值為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(5) 直線 L_2 與平面 F 的距離為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

6.(　　) $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 為空間中三個非零且兩兩不平行的向量，設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，下列哪些選項是正確的？

(1) $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|\le|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|$　　(2) 若 $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|<\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，則 $\theta>45^\circ$

(3) 必存在實數 x、y，使 $\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$

(4) 若 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=0$，則 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{b}=0$

(5) 若 $|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot|\overrightarrow{c}|$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$

7.(　　) 若三平面 $\begin{cases}E_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ E_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ E_3: a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 將空間分割成六個區域，已知 $d_1d_2d_3\neq 0$，且點 $P(1,1,1)$ 都在此三平面上，則下列哪些選項是正確的？

(1) 方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 恰一組解　(2) 行列式 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1+d_1\\ a_2 & b_2 & c_2+d_2\\ a_3 & b_3 & c_3+d_3\end{vmatrix}$ 之值必為 0

(3) 方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\\ a_2x+b_2y+c_2z=0\\ a_3x+b_3y+c_3z=0\end{cases}$ 中的三個平面也將空間分成六個區域

(4) 若 $\begin{cases}x=-1\\ y=2\\ z=1\end{cases}$ 為方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\\ a_2x+b_2y+c_2z=0\\ a_3x+b_3y+c_3z=0\end{cases}$ 的解，則 $\begin{cases}x=2\\ y=-1\\ z=0\end{cases}$ 為 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 的解

(5) 若 $\begin{cases}x=-1\\ y=2\\ z=1\end{cases}$ 為方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\\ a_2x+b_2y+c_2z=0\\ a_3x+b_3y+c_3z=0\end{cases}$ 的解，則 $\begin{cases}x=0\\ y=3\\ z=2\end{cases}$ 為方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=a_1+b_1+2c_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=a_2+b_2+2c_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=a_3+b_3+2c_3\end{cases}$ 的解

三、選填題(占 28 分)

A. 若 $2(x+9)^4-17(x+9)^3+10(x+9)^2-19(x+9)-5=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，則 $a-b+c-d+e$ 之值為___________。

B. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x, x\le 0\\ \log_2(x+4), x>0\end{cases}$，若 $f(a)\ge 8$，則 a 的取值範圍為 $a\le$________或 $a\ge$__________。

C. $\triangle ABC$ 中，$\cos B<0$，已知$\triangle ABC$ 的外心到 A 的距離為 $\sqrt{65}$，到 $\overline{AB}$ 的距離為 8，到 $\overline{BC}$ 的距離為 7，則 $\overline{AC}$ 的長為__________。

D. 在一個大福袋中，共裝有 30 個小福袋，其中小福袋有甲、乙、丙三種類別，而丙類小福袋占有 5 個。已知甲類的每個小福袋有 3 個白球、2 個黑球、1 個紅球；乙類的每個小福袋有 1 個白球、3 個黑球、2 個紅球；丙類的每個小福袋有 2 個白球、1 個黑球、3 個紅球。今先從大福袋中任抽出一個小福袋，再從小福袋中一次抽取出兩球。在已知此兩球為 1 個黑球 1 個白球的條件下，這兩球是從甲類中被抽出來的機率為 $\frac{9}{13}$，則大福袋中共有_________個甲類小福袋。

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

一、一袋中有 N 個球，其中有 K 個相同的紅球，其他皆為相同的白球，自袋中隨機抽取 n 個球，現有兩種取球方式：

方法①：一次取一球，每次取完後放回，共抽 n 個球。

方法②：一次抽取 n 個球

設隨機變數 X 為抽出的 n 個球中，紅球的個數，其中 $n \le K$ 且 $n \le N-K$ 。求下列各小題：

(1) 方法①及方法②中，隨機變數 X 的機率質量函數分別為 $f(x)$與 $g(x)$，求 $f(x)$與 $g(x)$。(可用 C_k^n ， P_k^n ， n^m 等符號表示)(各 2 分，共 4 分)

(2) 若依方法①的方式取球，則當 $(n,K,N)=(6,12,18)$ 時，取出紅球個數的期望值為何？(4 分)

(3) 已知等式 $C_k^{p+q}=C_0^pC_k^q+C_1^pC_{k-1}^q+C_2^pC_{k-2}^q+\cdots+C_k^pC_0^q$ 對於任意滿足 $k\le p$ 且 $k\le q$ 的正整數 k 恆成立，請根據此恆等式與(1)中的 $g(x)$證明：方法②中隨機變數 X 的期望值為 $n\times\dfrac{K}{N}$ 。

(提示：當 m、k 為正整數時， $k\cdot C_k^m=k\cdot\dfrac{m!}{k!(m-k)!}=m\cdot\dfrac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!}=m\cdot C_{k-1}^{m-1}$)(5 分)

二、(1) 求以直線 $L: x-2y=0$ 為鏡射軸的鏡射矩陣。(5 分)

(2) 已知 a、b、c、d 皆為實數，若 a、b 滿足 $|a|+|b-2|=3$，且 c、d 滿足 $\begin{cases}5c=3a+4b\\5d=4a-3b\end{cases}$ ，求 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最大值。(6 分)

RA598 臺中市立高級中等學校 **105** 學年度指定科目第三次 聯合模擬考數學甲

第壹部分：選擇題

1. (5)　2. (4)　3. (5)　4. (2)　5. (2)(3)(4)　6. (1)(4)(5)　7. (2)(3)(4)

選填題

A. -29　B. $a\le -3$ 或 $a\ge 252$　C. $\frac{6}{5}\sqrt{65}$　D. 15

第貳部分：非選擇題

一、(1) $f(x)=P(X=x)=C_x^n(\frac{K}{N})^x(1-\frac{K}{N})^{n-x}, x=0,1,2,\cdots,n$

$$g(x)=P(X=x)=\frac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N}, x=0,1,2,\cdots,n$$

(2) 4

(3) $$E(X)=\sum_{x=0}^{n}x\cdot g(x)=\sum_{x=0}^{n}x\cdot\frac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N}=\frac{1}{C_n^N}\sum_{x=0}^{n}x\cdot\frac{K!}{x!\cdot(K-x)!}\cdot C_{n-x}^{N-K}$$

$$=\frac{K}{C_n^N}\sum_{x=1}^{n}\frac{(K-1)!}{(x-1)!\cdot(K-x)!}\cdot C_{n-x}^{N-K}=\frac{K}{C_n^N}\sum_{x=1}^{n}C_{x-1}^{K-1}\cdot C_{n-x}^{N-K}$$

$$=\frac{K}{C_n^N}(C_0^{K-1}C_{n-1}^{N-k}+C_1^{K-1}C_{n-2}^{N-K}+C_2^{K-1}C_{n-3}^{N-K}+\cdots+C_{n-1}^{K-1}C_0^{N-K})$$

$$=\frac{K}{C_n^N}C_{n-1}^{K-1+N-K}=K\times\frac{n!(N-n)!}{N!}\times\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}=n\times\frac{K}{N}$$

二、(1) $\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$　(2) 80