

台北區高中 110 年(109 學年度)高三下 第二次指考模擬考 自然組試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 對於正整數 n ，已知空間中一直線 $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{2}$ 與平面 $2nx + 3y + nz = 8n$ 的唯一交點為 (a_n, b_n, c_n) ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 之值為下列哪一個選項？
 (1) -1 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 2 (4) 3 (5) $\frac{7}{2}$ 。

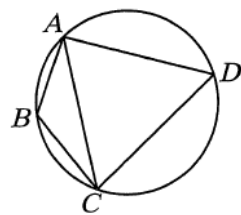
答：(3)

解：直線上動點 $M(-1+2t, -3+3t, 1+t) \in$ 平面： $2nx + 3y + nz = 8n$

$$\text{則 } 2n(-1+2t) + 3(-3+3t) + n(1+t) = 8n \Rightarrow t = \frac{9n+9}{6n+9}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + 2 \times \frac{9n+9}{6n+9} \right) = -1 + 2 \times \frac{9}{6} = 2$$

2. 如圖，一圓的內接四邊形 $ABCD$ ，若已知 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{CD} = 8$ ， $\angle ACB + \angle CAD = 90^\circ$ ，則四邊形 $ABCD$ 外接圓的面積是哪一個選項？
 (1) 15π (2) 16π (3) 18π (4) 20π (5) 25π 。



答：(4)

解：令 $\angle ACB = \theta$ ，則 $\angle CAD = 90^\circ - \theta$ ， R 為 $\triangle ACD$ 、 $\triangle CAD$ 外接圓半徑

$$\sin \theta = \frac{\overline{AB}}{2R} = \frac{4}{2R}, \quad \sin(90^\circ - \theta) = \frac{\overline{CD}}{2R} \Rightarrow \cos \theta = \frac{8}{2R}$$

$$\text{由 } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{2R} \right)^2 + \left(\frac{8}{2R} \right)^2 = 1 \Rightarrow R^2 = 20$$

3. 已知兩複數 z_1, z_2 滿足 $|z_1| = 2$ 且 $|z_2 + 18| = |z_2 - 24i|$ 。若 $|z_1 - z_2| = n$ ，且 n 為整數，則 n 的最小可能值為多少？
 (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 0。

答：(3)

解： $|z_1| = 2$ ，表 $z_1 \in x^2 + y^2 = 2^2$

$(-18, 0)$ 、 $(0, 24)$ 為端點的線段的中垂線為 $3x + 4y = 21$

$|z_2 + 18| = |z_2 - 24i|$ ，表 $z_2 \in 3x + 4y = 21$

而 $d((0, 0), 3x + 4y = 21) - 2 = \frac{21}{5} - 2 = \frac{11}{5}$ ，故 $|z_1 - z_2| \geq \frac{11}{5}$ ，取 $n = 3$

二、多選題

4. 設 $f(x)$ 是一個五次實係數多項式，已知 $f(i+2)=f(2)=f(2\sqrt{3})=0$ 且 $f(x)<0$ 的解為 $x<2$ ，試選出正確的選項。
- (1) $i+2$ 、 $i-2$ 、 2 、 $2\sqrt{3}$ 皆為方程式 $f(x)=0$ 的根
- (2) 除了 2 、 $2\sqrt{3}$ 外，其他實數都不是方程式 $f(x)=0$ 的根
- (3) $f(x)$ 的領導係數必為正實數
- (4) 方程式 $f(x^2)=0$ 不一定有實根
- (5) 若對於所有實數 x ， $g(20-x)=f(x)$ 皆成立，則 $g(17)>0$ 。

答：(2)(3)(5)

解：(1) $f(2+i)=0$ ， $f(x)$ 為實係數 $\Rightarrow f(2-i)=0$

(2)(3) $\deg f(x)=5$ 且 $f(2)=f(2\sqrt{3})=0$ ，又 $f(x)<0$ 之解為 $x<2$
 $\Rightarrow f(x)=a(x-2)(x-2\sqrt{3})^2(x^2-4x+5)$ ， $a>0$

(4) $f(x^2)=0 \Rightarrow x^2=2$ ， $2\sqrt{3}$ 時有實根 $\pm\sqrt{2}$ ， $\pm\sqrt[4]{12}$

(5) $g(20-x)=a(x-2)(x-2\sqrt{3})^2(x^2-4x+5)$
 $g(x)=a(18-x)(20-2\sqrt{3}-x)^2(x^2-36x+325)$
 $g(17)=a(1)(正)(正)>0$

5. 夜晚的天空有無數的星星閃爍其中，有些明亮耀眼，有些黯淡無光，因為星星和地球的距離各不相同，因此在地球所見恆星的亮度(m)受到本身的發光強度(M)及其與地球距離(d)兩因素影響。設一恆星本身發光的強度為絕對星等 M ，而在地球所見恆星的亮度為視星等 m ，恆星與地球距離為 d ， d_0 是一個標準距離單位，約等於 32 光年，則 M 、 m 、 d 三者之間的關係是

$$M = m + 5 \log \left(\frac{d_0}{d} \right)$$

天文學家便是依此判斷實際恆星本身發光的強度(M)。已知一般人的肉眼能夠分辨的極限大約為視星等 6.5 以下。試依此判斷選出正確的選項。

- (1) 由地球測量出織女星視星等為 0，且織女星距地球約為 26 光年，則織女星絕對星等 $M > 0$
- (2) 若有一恆星 α 的絕對星等為 0，且視星等也為 0，則其與地球之距離約等於 32 光年
- (3) 承(2)，若有另一恆星 β 的絕對星等也為 0 且與地球之距離比恆星 α 小，則其視星等會大於 0
- (4) 發光強度相等之兩恆星，於地球測得亮度分別為 m_1 、 m_2 ，兩恆星與地球距離分別為

$$d_1、d_2，若 m_1 - m_2 = k，則 \frac{d_1}{d_2} = \frac{k}{5}$$

- (5) 在與地球相同距離之恆星，其絕對星等與視星等之差為定值。

答：(1)(2)(5)

解：(1) $M = 0 + 5 \log \left(\frac{32}{26} \right) > 0$

(2) $0 = 0 + 5 \log \left(\frac{32}{d} \right) \Rightarrow d = 32$

(3) $0 = m + 5 \log \left(\frac{32}{\text{小於 } 32} \right) \Rightarrow m < 0$

(4) $m_1 - m_2 = \left[M - 5 \log \frac{32}{d_1} \right] - \left[M - 5 \log \frac{32}{d_2} \right]$

$\Rightarrow k = 5 (\log d_1 - \log d_2) \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = 10^{\frac{k}{5}}$

(5) $M - m = 5 \log \left(\frac{d_0}{\text{相同 } d} \right)$ 為定值

6. 西元 3030 年，某種新型 C 病毒造成一種新型傳染病 COVID-30。已知有一種檢測試劑可以對 99% 的 C 病毒感染者檢測出陽性，對於沒有感染 C 病毒的人，則有 99% 機率檢測出陰性。某 T 國的境內有一百萬人口，其中有「萬分之 8」的人口感染 C 病毒；在 T 國境之外則有「千分之 6」的人感染 C 病毒。若境外人士要入境，則必須接受兩次篩檢，這兩次篩檢的結果是獨立的。試選出正確的選項。

(1) 若針對境內人口進行普篩（每人檢測一次），則檢測結果為陽性的人數期望值不到 10,000 人

(2) 若針對境內人口進行普篩（每人檢測一次），則偽陽性的人數期望值超過 8,000 人

■：「偽陽性」是指檢測結果為陽性，但實際上並未感染 C 病毒

(3) 若某境內人士檢測一次的結果為陽性，則他真的感染 C 病毒的機率超過 10%

(4) 若一境外人士感染 C 病毒，則他入境時所做的兩次篩檢中至少有一次是陽性的機率超過 99.9%

(5) 若一境外人士要入境，他所做的兩次篩檢都是陰性，則他其實感染了 C 病毒的機率低於「十萬分之一」。

答：(2)(4)(5)

解：(1) $E(X_1) = 800 \times \frac{99}{100} + 999200 \times \frac{1}{100} = 10784$

(2) $E(X_2) = 999200 \times \frac{1}{100} = 9992$

(3) $P_3 = \frac{800 \times \frac{99}{100}}{10784} = 0.0734 \dots = 7.34 \dots \%$

(4) $P_4 = 1 - \left(\frac{1}{100} \right)^2 = 99.99 \%$

$$(5) P_5 = \frac{\frac{6}{1000} \times \left(\frac{1}{100}\right)^2}{\frac{6}{1000} \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{994}{1000} \times \left(\frac{99}{100}\right)^2} = \frac{6}{9742200} < \frac{1}{100000}$$

7. 聯立不等式 $\begin{cases} (x-15)^2 + (y+2)^2 \leq 5 \\ -2y + y \leq k \end{cases}$ 的解在坐標平面上形成的圖形面積為 A ，已知 $0 < A \leq \frac{5\pi}{2}$ ，試選出 k 可能的數值。
 (1) -40 (2) -36 (3) -32 (4) -28 (5) -24。

答：(2)(3)

解： $(x-15)^2 + (y+2)^2 = 5$ 與 $2x - y + k = 0$ 相切

$$\Rightarrow \frac{|30+2+k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow |32+k| = 5 \Rightarrow k = -37, -27 \text{ (不合)}$$

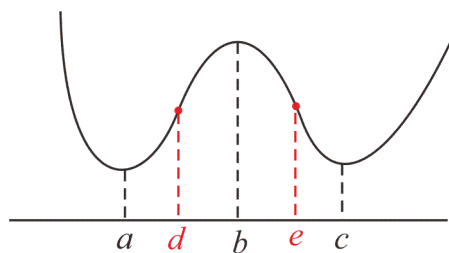
又 $2x - y + k = 0$ 過 $(15, -2) \Rightarrow k = -32$

依題意 $-37 < k \leq -32$ 時，可使 $\underbrace{0}_{k=-37} < A \leq \underbrace{\frac{5\pi}{2}}_{k=-32}$

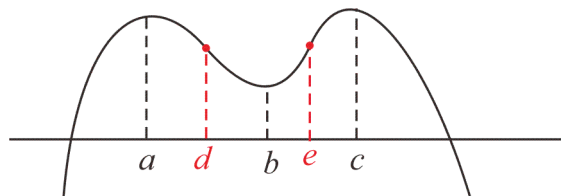
8. 已知 $f(x)$ 是一個四次實係數多項式，且 $f'(x)=0$ 有 3 個實根 a, b, c ($a < b < c$)， $f''(x)=0$ 有 2 個實根 d, e ($d < e$)，則下列哪些選項是正確的？
 (1) $d < b$ 一定成立 (2) $y = f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x = b$
 (3) $y = f(x)$ 的圖形在 d 與 b 之間凹口向下
 (4) 當 m 為任意實數， $y = f(x)$ 的圖形與直線 $y - f(c) = m(x - c)$ 最多有三個交點
 (5) $y = f'(x)$ 的圖形在 $x = d$ 處一定有相對極值。

答：(1)(5)

解：當領導係數為正



當領導係數為負



(1)(5) 正確

(2)(3)(4) 不一定

三、選填題

A. 對矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & a & c \\ 4 & 5 & b & d \end{bmatrix}$ 作列運算若干次後得到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ，
則 $a+b-c-d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：14

解： $\begin{bmatrix} 2 & 3 & a & c \\ 4 & 5 & b & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} & \frac{c}{2} \\ 4 & 5 & b & d \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{-4R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} & \frac{c}{2} \\ 0 & -1 & b-2a & d-2c \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} & \frac{c}{2} \\ 0 & 1 & 2a-b & 2c-d \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{2}R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2}a+\frac{3}{2}b & -\frac{5}{2}c+\frac{3}{2}d \\ 0 & 1 & 2a-b & 2c-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{故} \begin{cases} -\frac{5}{2}a+\frac{3}{2}b=5 \\ 2a-b=3 \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} -\frac{5}{2}c+\frac{3}{2}d=4 \\ 2c-d=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=19 \\ b=35 \\ c=14 \\ d=26 \end{cases}$$

B. 坐標平面上， $O(0,0)$ 、 $A(2,1)$ 、 $B(1,3)$ ，已知 $\triangle OAP$ 面積為 8， $\triangle OBP$ 面積為 9，
試求 $|\overrightarrow{OP}|$ 之最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式)

答： $2\sqrt{13}$

解： $\triangle OAP = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} \right\| = 8 \Rightarrow |2y-x|=16 \Rightarrow x-2y=\pm 16$

$$\triangle OBP = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ x & y \end{vmatrix} \right\| = 9 \Rightarrow |y-3x|=18 \Rightarrow 3x-y=\pm 18$$

$$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=-6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-4 \\ y=6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{52}{5} \\ y=-\frac{66}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{5}{66} \\ y=\frac{5}{66} \end{cases}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{13} \text{ 或 } 2\sqrt{1765}$$

C. 某觀光勝地有名地標龍虎雙塔，其中天龍塔高 40 公尺，地虎塔高 20 公尺，兩塔距離 80 公尺。現在想要在平地上找尋一個「觀塔點」，並希望自觀塔點看兩塔頂的兩視線互相垂直，且看兩塔頂的仰角相同。為了方便計算觀塔點位置，建置一個空間直角坐標系， xy 平面為地面，天龍塔底在 $A(0,40,0)$ ，地虎塔底在 $B(0,-40,0)$ ，若符合條件的觀塔點在 $P(x,y,0)$ ，則 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： -18

解： $P(x,y,0)$ ， $A(0,40,0)$ ， $A'(0,40,40)$ ， $B(0,-40,0)$ ， $B'(0,-40,20)$

$$\overrightarrow{A'P} \cdot \overrightarrow{B'P} = (x, y-40, -40) \cdot (x, y+40, -20) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 1600 + 800 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 800$$

$$\tan \angle PAA' = \tan \angle PBB' \Rightarrow \frac{40}{PA} = \frac{20}{PB} \Rightarrow \overline{PA} = 2 \overline{PB}$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + (y-40)^2 + 0^2 \right) = 4 \left(x^2 + (y+40)^2 + 0^2 \right)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 400y + 4800 = 0 \Rightarrow y = -18, x^2 = 476$$

第貳部分：非選擇題

1. 已知 $f(x)$ 為實係數多項式，且 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{(x-5)^2} = L$ 。

(1) 請證明： $f(5) = 0$ 。(2) 請證明： $f'(5) = 0$ 。

(3) 若 $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ ，試求數對 (a, b) 以及 L 之值。

(4) 承(3)，試求 $y = f(x)$ 與 x 軸所圍成的封閉區域面積。

答：(1) 見解析 (2) 見解析 (3) $(a, b) = (-50, 625)$ ， $L = 100$ (4) $\frac{10000}{3}$

解：(1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{(x-5)^2} = L$ ，表 $f(x) = (x-5)^2 Q(x)$ ，則 $f(5) = 0$

(2) $f'(x) = 2(x-5)Q(x) + (x-5)^2 Q'(x)$ ，則 $f'(5) = 0$

(3) $f(x) = x^4 + ax^2 + b \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2ax$

$$\frac{f(5)=0 \text{ 且 } f'(5)=0}{\rightarrow} \begin{cases} 25a + b + 625 = 0 \\ 10a + 500 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -50 \\ b = 625 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{(x-5)^2} = \lim_{x \rightarrow 5} \left(x^2 + 10x + 25 \right) = 100 = L$$

(4) $f(x) = (x-5)^2 (x+5)^2$

$$\text{所求} = \int_{-5}^5 \left(x^4 - 50x^2 + 625 \right) dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{50}{3}x^3 + 625x \Big|_{-5}^5 = \frac{10^4}{3}$$

2. 已知函數 $f(x) = a \sin 2x + 3 \cos 2x + c$ 的部分圖形如右，

函數 $y = f(x)$ 圖形與 x 軸相切且通過點 $P(4\pi, 8)$ ，

又設 $f(x) = 2$ 的正實根由小而大排列為

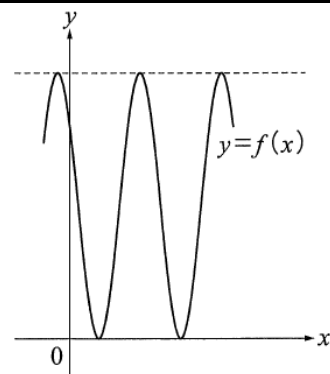
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots$ ，試回答下列問題。

(1) $c = ?$

(2) $|a| = ?$

(3) $a = ?$

(4) $x_4 = ?$



答：(1) $c = 5$ (2) $|a| = 4$ (3) $a = -4$ (4) $\frac{3\pi}{2}$

$$\boxed{\text{解}}: \begin{cases} -\sqrt{a^2+3^2}+c=0 \\ f(4\pi)=0+3+c=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=5 \\ |a|=4 \end{cases}$$

圖為 $y=f(x)=5\sin 2x+5$ 向左平移 $\frac{\pi}{4} \sim \frac{\pi}{2}$

若 $a=4$, $f(x)=4\sin 2x+3\cos 2x+5$

$$=5\left[\frac{4}{5}\sin 2x+\frac{3}{5}\cos 2x\right]+5=5\sin(2x+\theta)+5$$

其中 $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$, 矛盾

若 $a=-5$, $f(x)=-4\sin 2x+3\cos 2x+5$

$$=5\left[\frac{-4}{5}\sin 2x+\frac{3}{5}\cos 2x\right]+5=5\sin(2x+\theta)+5$$

其中 $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{-4}{5}$, $\frac{3\pi}{4}<\theta<\pi$, 成立

當 $-4\sin 2x+3\cos 2x+5=2$

$$\Rightarrow (-4\sin 2x)^2 = (-3-3\cos 2x)^2$$

$$\Rightarrow 16[1-\cos^2 2x] = 9+18\cos 2x+9\cos^2 2x$$

$$\Rightarrow 25\cos^2 2x+18\cos 2x-7=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{7}{25} \\ \sin 2x = \frac{24}{25} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_3 = x_5 = \dots = \frac{1}{2}\cos^{-1} \frac{7}{25}$$

$$x_2 = x_4 = x_6 = \dots = \frac{1}{2}\cos^{-1} (-1)$$

$$\therefore x_4 = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$