數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
答案	(3)	(5)	(4)	(2)(3)	(2)(5)	(1)(4)	(2)(3)(4)	(1)(2)(5)	

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：評量學生是否能利用常用對數值及對數律來解決生活中的應用問題

解析：依題意可知 30 年後該套餐的價格應為 $100\times(1+0.03)^{30}=100\times1.03^{30}$ (元)

設 $x=1.03^{30}$

$\Rightarrow \log x=\log 1.03^{30}=30\log 1.03\approx 30\times0.0128=0.384\approx\log 2.42$

$\Rightarrow x\approx 2.42$

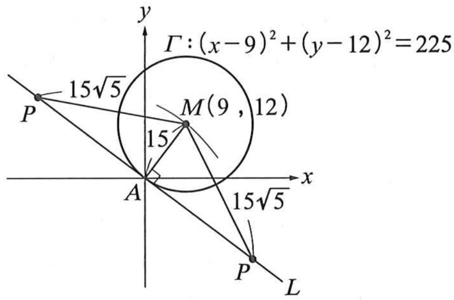
$\therefore 100\times1.03^{30}\approx 100\times2.42=242$(元)，故選(3)。

2. (5)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、第四冊第三章〈矩陣〉

目標：評量學生利用圓與直線相切的性質及伸縮、旋轉矩陣的能力

解析：設圓心為 $M(9,12)$，作圖如右



可知 $\overline{AM}=15$，$\overline{MP}=15\sqrt{5}$

$\Rightarrow \overline{AP}=\sqrt{\overline{MP}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{(15\sqrt{5})^2-15^2}=30$

$\Rightarrow \overline{AP}=2\overline{AM}$

(1)當 P 點位於第二象限時，

將點 $M(9,12)$ 以 A 點為中心，逆時針方向旋轉 $\frac{\pi}{2}$，

再伸縮 2 倍可得點 $P(a,b)$

即 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$

(2)當 P 點位於第四象限時，

將點 $M(9,12)$ 以 A 點為中心，順時針方向旋轉 $\frac{\pi}{2}$，再伸縮 2 倍可得點 $P(a,b)$

即 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$

故選(5)。

3. (4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：評量學生是否能結合多項式的除法原理與微分來解題

解析：由題意可得 $f'(x)=18x^2+2bx+c\Rightarrow f''(x)=36x+2b$

由除法原理可設 $f(x)=(x^2+x+2)(6x+k)+36x+2b$

$\Rightarrow f(x)=6x^3+(6+k)x^2+(48+k)x+(2k+2b)$

比較係數可得 $\begin{cases} 6+k=b \cdots\cdots\cdots\cdots① \\ 48+k=c \cdots\cdots\cdots\cdots② \\ 2k+2b=-36 \cdots\cdots\cdots③ \end{cases}$

③－①×2 得 $4b=-24\Rightarrow b=-6$ 代入①可得 $k=-12$

再代入②可得 $c=36$

$\Rightarrow f(x)=6x^3-6x^2+36x-36=6x^2(x-1)+36(x-1)=6(x^2+6)(x-1)$

故選(4)。

二、多選題

4. (2)(3)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：評量學生能否計算圓外一定點與圓上一動點距離的最大值與最小值

解析：$\because \overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2$

$\therefore P$ 點位於以 A、B 為直徑兩端點的圓 Γ 上，

可知圓 Γ：$(x-9)^2+(y-1)^2=25$

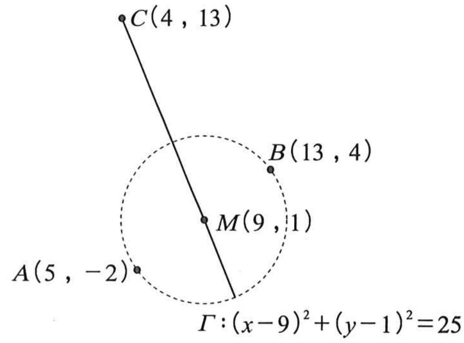
設圓心為 $M(9, 1)$

$\because (4-9)^2+(13-1)^2>25$ $\quad\therefore C$ 點位於圓 Γ 外

又 $\overline{MC}=\sqrt{(4-9)^2+(13-1)^2}=13$，且半徑 $r=5$

因此可得 $\overline{MC}-r\le\overline{PC}\le\overline{MC}+r\Rightarrow 8\le\overline{PC}\le 18$

故選(2)(3)。



5. (2)(5)

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：評量學生是否可理解複數的幾何意涵，並能利用複數的極式來解題

解析：設複數 z_1 的主輻角為 α，複數 z_2 的主輻角為 β

$\because \angle AOB$ 為銳角 $\quad\therefore 0<|\alpha-\beta|<\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}<|\alpha-\beta|<2\pi$

又 $|z_1|=3$，$|z_2|=15$，因此可知 $z_1=3(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$z_2=15(\cos\beta+i\sin\beta)$

$\Rightarrow \dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{15(\cos\beta+i\sin\beta)}{3(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=5(\cos(\beta-\alpha)+i\sin(\beta-\alpha))$，其中 $\cos(\beta-\alpha)>0$，$\sin(\beta-\alpha)\ne 0$

(1)╳：$\because |1+i|=\sqrt{2}\ne 5$ $\quad\therefore 1+i$ 不可能與 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 相等

(2)○：$\because |2+\sqrt{21}i|=5$，且 $2>0$，$\sqrt{21}\ne 0$ $\quad\therefore 2+\sqrt{21}i$ 可能與 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 相等

(3)╳：$\because -1+2\sqrt{6}i$ 的實部為 $-1<0$ $\quad\therefore -1+2\sqrt{6}i$ 不可能與 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 相等

(4)╳：$\because 5i$ 的實部為 0 $\quad\therefore 5i$ 不可能與 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 相等

(5)○：$\because |4-3i|=5$，且 $4>0$，$-3\ne 0$ $\quad\therefore 4-3i$ 可能與 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 相等

故選(2)(5)。

6. (1)(4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：評量學生是否能利用三角不等式、柯西不等式及二階行列式來解題

解析：設 $\overrightarrow{u}=(a, b)$，$\overrightarrow{v}=(24, 108)$，

可知 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(a+24, b+108)$，及 $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|$

由三角不等式可得 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 同向，即 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{24}{108}=\dfrac{2}{9}$，其中 $a>0$，$b>0$

(1)○：$\because \dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$ $\quad\therefore$ 數對 (a, b) 可能為 $(6, 27)$

(2)╳：$\because \dfrac{12}{12}\ne\dfrac{2}{9}$ $\quad\therefore$ 數對 (a, b) 不可能為 $(12, 12)$

(3)╳：$\because a>0$，$b>0$ $\quad\therefore$ 由三角不等式可得 $|a|+|b|=|a+b|$

(4)○：由柯西不等式可得 $(a^2+b^2)(24^2+108^2)\ge(24a+108b)^2$，又 $\dfrac{a}{24}=\dfrac{b}{108}$

$\therefore (a^2+b^2)(24^2+108^2)=(24a+108b)^2$

(5)╳：$\because \dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{9}$ $\quad\therefore \begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 9 \end{vmatrix}=0$

故選(1)(4)。

7. (2)(3)(4)

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：評量學生是否能利用空間中的直線參數式來解題

解析：由題意可知 L_1：$\begin{cases} x=t \\ y=3+2t \\ z=9 \end{cases}$，$t\in R$，$L_2$：$\begin{cases} x=-1+2s \\ y=3s \\ z=-s \end{cases}$，$s\in R$

設 $A(t\,,3+2t\,,9)$，$B(-1+2s\,,3s\,,-s)$，

由中點公式可得 $\overline{AB}$ 的中點為 $M\left(\dfrac{t+2s-1}{2}\,,\dfrac{2t+3s+3}{2}\,,\dfrac{9-s}{2}\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{t+2s-1}{2} \\ y=\dfrac{2t+3s+3}{2} \\ z=\dfrac{9-s}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} t+2s=2x+1\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①} \\ 2t+3s=2y-3\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{②} \\ s=9-2z\ \ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{③} \end{cases}$$

①×2－②得 $s=4x-2y+5$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$④

將③代入④可得 $9-2z=4x-2y+5\Rightarrow 2x-y+z=2$

(1)╳：$2\times(-2)-0+0\neq 2$

(2)○：$2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}=2$

(3)○：$2\times 1-0+0=2$

(4)○：$2\times 1-1+1=2$

(5)╳：$2\times 2-1+1\neq 2$

故選(2)(3)(4)。

8. (1)(2)(5)

出處：選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉

目標：評量學生是否能計算函數的極限

解析：(1)○：$f(4)+g(4)=[4]+[-3]=4+(-3)=1$

(2)○：$\lim\limits_{x\to 3.9}g(x)=\lim\limits_{x\to 3.9}[1-x]=-3$

(3)╳：$\because \lim\limits_{x\to 4^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}[1-x]=-4$，$\lim\limits_{x\to 4^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}[1-x]=-3$

$\therefore \lim\limits_{x\to 4}g(x)$ 不存在

(4)╳：$\because \lim\limits_{x\to 3.9}f(x)=\lim\limits_{x\to 3.9}[x]=3$，且 $\lim\limits_{x\to 3.9}g(x)=\lim\limits_{x\to 3.9}[1-x]=-3$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3.9}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 3.9}f(x)+\lim\limits_{x\to 3.9}g(x)=3+(-3)=0$

(5)○：①當 $4<x<5$ 時，可知 $-4<1-x<-3\Rightarrow[x]+[1-x]=4+(-4)=0$

②當 $3<x<4$ 時，可知 $-3<1-x<-2\Rightarrow[x]+[1-x]=3+(-3)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 4^+}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 4^+}([x]+[1-x])=0$，$\lim\limits_{x\to 4^-}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 4^-}([x]+[1-x])=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4}(f(x)+g(x))=0$

故選(1)(2)(5)。

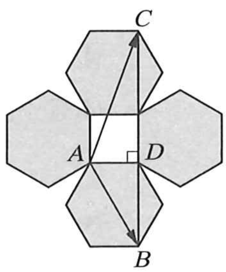
三、選填題

A. $-2-\sqrt{3}$

出處：第三冊第一章〈三角〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：評量學生是否能運用向量分解來計算向量內積

解析：設 $\overline{AD}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 D 點，作圖如右



可知 $\overline{BD}=\sqrt{1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos120^\circ}=\sqrt{3}\Rightarrow\overline{CD}=\sqrt{3}+1$

由向量分解可得

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$

$=|\overrightarrow{AD}|^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$

$=1^2+0+0+\sqrt{3}\times(\sqrt{3}+1)\times\cos180^\circ=-2-\sqrt{3}$。

B. $24+7\sqrt{3}$

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：評量學生能否使用倍角及差角公式來解題

解析：設$\angle OBC=\theta$，可知 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

$$\Rightarrow \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25}\text{，}\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$$

$$\angle AOC=2\pi-2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}-2\theta$$

$$\sin\angle AOC=\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2\theta\right)=\sin\frac{4\pi}{3}\cos 2\theta-\cos\frac{4\pi}{3}\sin 2\theta$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{7}{25}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{24}{25}=\frac{24+7\sqrt{3}}{50}$$

又 $\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{AB}=10$

故$\triangle OAC$的面積為 $\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OC}\times\sin\angle AOC=\dfrac{1}{2}\times10\times10\times\dfrac{24+7\sqrt{3}}{50}=24+7\sqrt{3}$

C. $\dfrac{135}{512}$

出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：評量學生是否能計算期望值與條件機率

解析：設隨機變數 X 表示投擲此硬幣四次所出現正面的次數，而隨機變數 Y 表示玩此遊戲所得的總獎金

若投擲此硬幣一次出現正面的機率為 p，則隨機變數 X 有二項分布 $B(4,p)$，且 $Y=10X$

$\therefore$可得 $E(Y)=E(10X)=10E(X)=10\times4\times p=40p=15\Rightarrow p=\dfrac{3}{8}$

故 P(總獎金 30 元 | 第四次為正面)$=P$(3 正 1 反 | 第四次為正面)$=\dfrac{C^3_2\times\left(\frac{3}{8}\right)^2\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{135}{512}$。

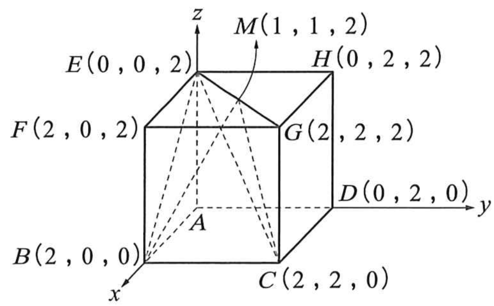
第貳部分：非選擇題

一、(1) $\sqrt{5}$；(2) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$；(3) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$；(4) $\dfrac{2}{3}$

出處：第四冊第一章〈空間向量〉、第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：評量學生是否能建立空間坐標系來解題

解析：(1)將圖形坐標化，如右圖所示



設 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，

$E(0,0,2)$，$F(2,0,2)$，$G(2,2,2)$，$H(0,2,2)$

$\because M$ 為 $\overline{EG}$ 的中點　$\therefore M(1,1,2)$

可知 $\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BM}=(-1,1,2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BM}=\left(\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&0\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&2\\-1&1\end{vmatrix}\right)$$

$$=(4,0,2)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BM}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$$

故$\triangle BCM$的面積為 $\sqrt{5}$。

(2)承(1)可知，$\overrightarrow{BE}=(-2,0,2)\Rightarrow\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BC}=\left(\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&-2\\0&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&0\\0&2\end{vmatrix}\right)=(-4,0,-4)\,//\,(1,0,1)$

又 $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BM}=(4,0,2)\,//\,(2,0,1)$

$\therefore\ \overrightarrow{n_1}=(2,0,1)$、$\overrightarrow{n_2}=(1,0,1)$ 分別為平面 BCM、平面 BCE 的一組法向量

故 $\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=\left|\dfrac{2\times1+0\times0+1\times1}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}\right|=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$。

(3)承(2)，由點法式可得平面 BCM 的方程式為 $2(x-2)+z=0 \Rightarrow 2x+z-4=0$

故點 E 到平面 BCM 的距離為 $d(E\text{, 平面 }BCM)=\dfrac{|2\times0+2-4|}{\sqrt{2^2+0^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

(4)承(1)、(3)可知，$\triangle BCM$ 的面積為 $\sqrt{5}$ ，且 $d(E\text{, 平面 }BCM)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

故四面體 $BCME$ 的體積為 $\dfrac{1}{3}\times\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2}{3}$ 。

〈另解〉

承(1)、(2)可知 $\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BM}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,0,2)$

故四面體 $BCME$ 的體積為 $\dfrac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}0&2&0\\-1&1&2\\-2&0&2\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{6}|-8+4|=\dfrac{2}{3}$ 。

二、(1) 1；(2) $\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{88}{27}\right)$；(3) 1；(4) $\dfrac{55}{12}$

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：評量學生對於三次多項式圖形的基本認知，並能利用微積分來解題

解析：(1)由題意可知 $f'(x)=3x^2+2kx+1$

$\because f(x)$ 為嚴格遞增函數　$\therefore f'(x)\geq 0$ 恆成立

判別式 $D=(2k)^2-4\times3\times1\leq 0 \Rightarrow -\sqrt{3}\leq k\leq\sqrt{3}$

又 k 為正整數，故 $k=1$。

(2)承(1)可知，$f(x)=x^3+x^2+x-3$，$f'(x)=3x^2+2x+1$

$\Rightarrow f''(x)=6x+2=6\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$

列表如下

x	$-\frac{1}{3}$	
$f''(x)$	$-$　　0	$+$
凹向	凹口向下	凹口向上

又 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3}-3=-\dfrac{88}{27}$

故反曲點為 $\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{88}{27}\right)$。

(3)$\because$解不等式 $f(x)\geq 0$ 可得 $(x-1)(x^2+2x+3)\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$

又 $f(x)$ 為嚴格遞增函數

$\therefore$由定積分與面積關係可知

當 $a=1$ 時，定積分 $\int_a^2 f(x)dx$ 有最大值。

(4)承(3)可知，

$\int_a^2 f(x)dx$ 的最大值為 $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x^3+x^2+x-3)dx$

$$=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Bigg|_1^2$$

$$=\frac{1}{4}(16-1)+\frac{1}{3}(8-1)+\frac{1}{2}(4-1)-3(2-1)$$

$$=\frac{15}{4}+\frac{7}{3}+\frac{3}{2}-3$$

$$=\frac{55}{12}\text{。}$$