

全國公立高級中學 110 學年度分科測驗第六次聯合模擬考



第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 設矩陣 $\begin{bmatrix} -2-k & -5 \\ 9 & 12-k \end{bmatrix}$ 所代表的線性變換，可將坐標平面上含原點外的某些點變換至原點，則滿足此一條件的所有點在坐標平面上所形成的圖形為下列哪一個選項？
(1)一直線 (2)兩平行直線 (3)兩相交直線 (4)圓形 (5)雙曲線
2. 經常有民眾質疑手機遊戲內付費抽獎的中獎機率遠低於官方宣稱的數據，某遊戲公司為消弭這樣的質疑，欲加入一個保證中獎機制，規則為遊戲者每次抽獎的中獎機率為 10%，且每次抽獎中獎與否皆為獨立事件，當遊戲者自上次中獎後連續多次抽獎均未中獎的機率一旦低於 10% 時，系統會自動讓下一次抽獎為保證中獎。設每次抽獎需要花費 10 元，試問遊戲者自某次中獎後至少需要花費多少錢則必定能再中獎。
(1)100 元 (2)130 元 (3)150 元 (4)200 元 (5)230 元
3. 已知 $f(x)$ 為三次多項式，若 $xf'(x) = f(x) + x^3 + x^2 + 111$ 恆成立，則 $f'(2) - f'(0)$ 之值為下列哪一個選項？(1)13 (2)12 (3)11 (4)10 (5)9

二、多選題(占 40 分)

4. 桌上有標示著 0 到 9 的卡片各一張，每一張翻開前並無法知道其背面的數字，且翻開後有 $\frac{1}{2}$ 的機率為可閱讀的數字，也有 $\frac{1}{2}$ 的機率為上下左右顛倒的數字(例如：翻開後有可能為 7 或是 L)，其中 0、1、8 上下左右顛倒後數字不改變，9、6 上下左右顛倒後數字互換，其餘數字上下左右顛倒後定義為“不可閱讀”，請選出正確的選項。
(1)任意抽取一張卡片，翻開後為不可閱讀的機率為 $\frac{1}{4}$
(2)任意抽取一張卡片，翻開後為可閱讀且數字小於 7 的機率為 $\frac{1}{2}$
(3)任意抽取兩張卡片，翻開後兩張均不可閱讀的機率為 $\frac{1}{16}$
(4)任意抽取兩張卡片，翻開後兩張均可閱讀的機率為 $\frac{9}{16}$
(5)卡片翻開後若為不可閱讀視為 0，則任意抽取兩張卡片的數字和期望值為 $\frac{69}{10}$
5. 已知 a, b 均為非 0 實數，若 $y = f(x) = x(ax^2 + b)$ 與 $y = 7$ 圖形有二交點，請選出正確的選項。
(1) $y = f(x)$ 之圖形與 x 軸有三個交點 (2) $ab > 0$
(3) 若 $f(111) = 2022$ ，則 $f(-111) = -2022$ (4) $y = f(x) + 13$ 與 $y = 7$ 之圖形交於三點
(5) 若 $y = f(x)$ 之圖形在 $x = 0$ 附近的特徵近似於一次多項式 $y = h(x)$ 且與 $y = 7$ 交於 $(14, 7)$ ，則 $b = 2$
6. 小良發現如果拿著一顆正立方體骰子在陽光下，隨著骰子的翻轉，在地面上會出現不同形狀的影子，假若太陽光與地面互相垂直且骰子的邊長為 6 公分，請選出正確的選項。
(1) 骰子在地面產生的影子可能為三角形 (2) 骰子在地面產生的影子可能為五邊形
(3) 若骰子在地面上產生的影子為矩形，則此矩形最小面積為 36 平方公分
(4) 若骰子在地面上產生的影子為矩形，則此矩形最大面積為 $36\sqrt{2}$ 平方公分
(5) 若骰子在地面上產生的影子為正六邊形，則此正六邊形面積為 $36\sqrt{3}$ 平方公分

7. 已知兩等比數列 $\langle a_n \rangle = \langle 2, 4, 8, \dots \rangle$ ， $\langle b_n \rangle = \langle 5, 25, 125, \dots \rangle$ ，若將兩數列之所有數字混合後並由小至大重新排列後得到一個新的數列 $\langle c_n \rangle = \langle 2, 4, 5, 8, 16, 25, \dots \rangle$ ，請選出正確的選項。
- (1) $a_n = 2^n$ ， n 為自然數 (2) 數列 $\langle c_n \rangle$ 中的各項均相異 (3) $a_{30} > b_{15}$ (4) $a_{30} = c_{45}$
 (5) 若 $a_{20} = c_k$ ， $a_{30} = c_{k+h}$ ，則 $h = 14$
8. 由於 Covid-19 疫情擴散，台灣於 2021 年 5 月 15 日由中央流行疫情指揮中心宣布台北都會區進入三級防疫警戒，並於 5 月 19 日將三級防疫警戒區擴大至全國，同時也積極進行疫苗接種，以下為衛生福利部疾病管制署統計台灣自 5 月 17 日開始每週的 Covid-19 總確診人數，死亡人數與疫苗接種人數表：

日期	每周確診人數	每周死亡人數	每周疫苗接種人數
5/17 至 5/23	3388	11	108020
5/24 至 5/30	3149	86	168442
5/31 至 6/6	2301	151	228047
6/7 至 6/13	1521	177	137272
6/14 至 6/20	943	112	650705
6/21 至 6/27	574	83	403128
6/28 至 7/4	344	56	582107
7/5 至 7/11	205	52	1019858
7/12 至 7/18	160	28	1571750
7/19 至 7/25	151	18	1369280

在這 10 週的統計資料中，請依上述數據，選出正確的選項。

- (1) 若每周確診人數最高時，則該周死亡人數也達到最高
 (2) 每日的平均疫苗接種人數低於 10 萬人
 (3) 自 5/31 至 7/25，每周確診人數與每周死亡人數成正相關
 (4) 這 10 周中，每周確診人數與每周疫苗接種人數成負相關
 (5) 這 10 周中，每周死亡人數與每周疫苗接種人數成負相關

三、選填題 (占 18 分)

9. 已知 $x > 0$ ，若有 k 個 x 值，使函數 $f(x) = \sqrt{(x+4)^2 + (\log 1000x)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (\log \frac{x}{100})^2}$ 產生最小值，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

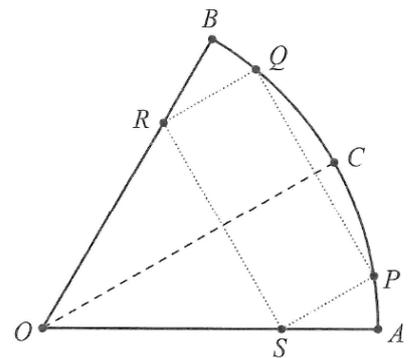
10. 若 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{3}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n-1}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 在複數平面上， $A(Z_1)$ 、 $B(Z_2)$ 、 $C(Z_3)$ ，若 Z_1 、 Z_2 、 Z_3 互異且 $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$ ， $|Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = 2$ 則 $\triangle ABC$ 的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

小樺拿了一張扇形紙片如圖(1)所示，已知 $\angle AOB = 60^\circ$ ， \overline{OC} 為 $\angle AOB$ 的角平分線且 $\overline{OB} = 10$ 公分，今小樺於 \widehat{AC} 上取任意點 P (非 A, C 點)，並將紙片沿著 \overline{OC} 對折，發現 P 點重合於 \widehat{BC} 上的點 Q ，再以 \overline{PQ} 為一邊，並分別取 \overline{OB} ， \overline{OA} 上的點 R, S ，使四邊形 $PQRS$ 形成一個矩形，小樺發現隨著 P 點選取的位置不同，矩形的大小也會有所差異，假設 $\angle AOP = \theta$ ，試回答下列問題：



圖(1)

12. \overline{PS} 可表示為下列哪一個選項？(單選題，3 分)

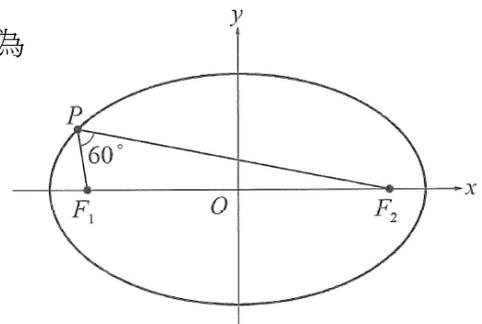
- (1) $10\sqrt{3}\sin\theta$ (2) $10\sqrt{3}\cos\theta$ (3) $10\sqrt{3}\tan\theta$
 (4) $20\sin\theta$ (5) $20\cos\theta$

13. 若 $\overline{PQ} = \sqrt{3}\overline{PS}$ ，則 $\tan\theta =$ _____。(化為最簡根式)(選填題，3 分)

14. 試求矩形 $PQRS$ 的最大面積。(非選擇題，6 分)

15-17 題為題組

如圖(2)所示，有一橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ，兩焦點分別為 F_1 及 F_2 ，設 P 為橢圓上一點，且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ，試回答下列問題：



圖(2)

15. 試求 $\overline{PF_1} \times \overline{PF_2}$ 的值為何？(非選擇題，4 分)

16. 試求 $\triangle F_1PF_2$ 的面積。(非選擇題，2 分)

17. 若以原點為中心將 Γ 逆時針旋轉 45° 得新橢圓 Γ' ，則 Γ' 的新方程式為何？(非選擇題，6 分)

**RA6102 全國公私立高級中學 110 學年度分科測驗第六次聯合模擬考
數學甲參考答案**

選擇題：1.(3) 2.(5) 3.(4) 4.(1)(2)(5) 5.(1)(3)(4) 6.(3)(4)(5) 7.(1)(2)(5) 8.(2)(3)(4)(5)

選填題：9. 2 10. $\frac{1}{4}$ 11. $3\sqrt{3}$

混合題或非選擇題：12. (4) 13. $\frac{\sqrt{3}}{9}$ 14. $200-100\sqrt{3}$

15. 12 16. $3\sqrt{3}$ 17. $17x^2-16xy+17y^2-225=0$