全國公私立高級中學 110 學年度分科測驗第六次聯合模擬考試

數學甲考科解析

考試日期：110 年 4 月 12~13 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9-1	10-1	10-2	11-1	11-2	12
3	5	4	125	134	345	125	2345	2	1	4	3	3	4
13-1	13-2	14	15	16	17								
3	9												

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 依題意$\begin{bmatrix}-2-k & -5\\ 9 & 12-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}(-2-k)x-5y=0\\ 9x+(12-k)y=0\end{cases}$ 有除了 $(0,0)$ 以外的解

意即 $\Delta=\begin{vmatrix}-2-k & -5\\ 9 & 12-k\end{vmatrix}=(-2-k)(12-k)-(-45)$

$=k^2-10k+21=(k-3)(k-7)=0$，

則 $k=3$ 或 7，可知矩陣$\begin{bmatrix}-2-k & -5\\ 9 & 12-k\end{bmatrix}$可將

L_1：$x+y=0$ 與 L_2：$9x+5y=0$ 上的所有點變換至原點。

故選(3)。

2. 假設連續抽獎 n 次均未中獎，則 $n+1$ 次保證中獎，

第依題意知 $(0.9)^n<0.1$，

同取 log 可得 $\log(0.9)^n<\log 0.1\Rightarrow n(0.9542-1)<-1$

$\Rightarrow n>\dfrac{1}{0.0458}=21.83\cdots$，

n 至少為 22，則第 23 次必定中獎，需花費 230 元。

故選(5)。

3. 將 $xf'(x)=f(x)+x^3+x^2+111$ 兩邊分別對 x 微分可得

$f'(x)+xf''(x)=f'(x)+3x^2+2x$

$\Rightarrow f''(x)=3x+2$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{2}x^2+2x+c$

$\Rightarrow f'(2)-f'(0)=(\dfrac{3}{2}\times 2^2+2\times 2+c)-c=6+4=10$，

故選(4)。

二、多選題

4. (1) ○：抽到 2 , 3 , 4 , 5 , 7 有 $\frac{1}{2}$ 的機率為不可閱讀，

故不可閱讀的機率為 $\dfrac{5}{10}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$。

(2) ○：可閱讀且數字小於 7 的機率為

$(0,1)$　$(2,3,4,5)$　$(6,9)$

$\Rightarrow\dfrac{2}{10}\times 1+\dfrac{4}{10}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$。

(3) ×：兩張均不可閱讀的機率為 $\dfrac{C^5_2}{C^{10}_2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{18}$。

(4) ×：數字 2 , 3 , 4 , 5 , 7 有 $\frac{1}{2}$ 的機率為不可閱讀，

0 , 1 , 6 , 8 , 9 則必定可以閱讀，兩張均可閱讀的機率

為 $\dfrac{C^5_2}{C^{10}_2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{C^5_1C^5_1}{C^{10}_2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{C^5_2}{C^{10}_2}\times 1=\dfrac{5}{9}$。

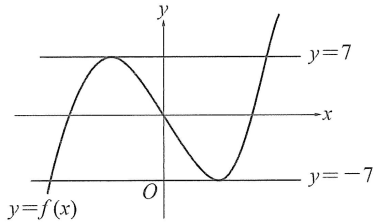
(5) ○：抽一張的數字期望值為

$\dfrac{1}{10}\times[(2+3+4+5+7)\times\dfrac{1}{2}+(0+1+8+6+9)\times 1]=\dfrac{69}{20}$，

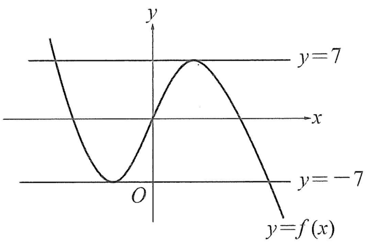
則抽取兩張卡片的數字和期望值為 $\dfrac{69}{20}\times 2=\dfrac{69}{10}$。

故選(1)(2)(5)。

5. 已知 $y=f(x)$ 的對稱中心為 $(0,0)$ 且依題意知三次函數可能為以下兩種狀況。



圖(一)



圖(二)

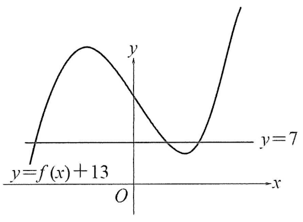
(1) ○：以上兩種狀況，$y=f(x)$ 之圖形與 x 軸有 3 個交點。

(2) ×：與 x 軸三個交點的 x 坐標為 $x=0$ 或 $x^2=\dfrac{-b}{a}$，

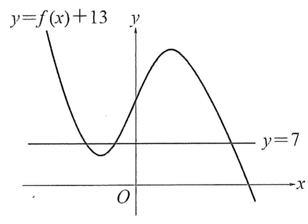
$\dfrac{-b}{a}>0\Rightarrow ab<0$。

(3) ○：由對稱中心為 $(0,0)$，若 $y=f(x)$ 圖形通過 $(111,2022)$，則必通過 $(-111,-2022)$。

(4) ○：$y=f(x)+13$ 的圖形為 $y=f(x)$ 的圖型向上平移 13 單位，由下圖(三)、(四)知 $y=f(x)+13$ 與 $y=7$ 之圖形交於三點。



圖(三)



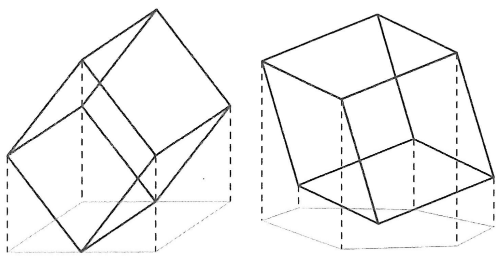
圖(四)

(5) ×：$y=f(x)$ 之圖形在 $x=0$ 附近的特徵近似於一次多項式 $y=h(x)=bx$，b 為此直線斜率，

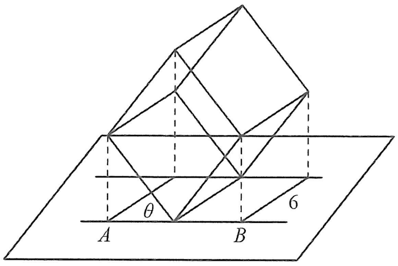
且通過 $(0,0)$，$(14,7)$，則 $b=\dfrac{7-0}{14-0}=\dfrac{1}{2}$。

故選(1)(3)(4)。

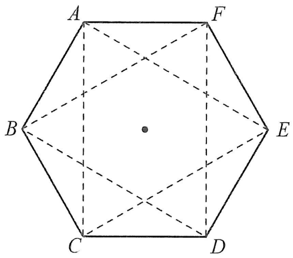
6. (1)(2) ×：正立方體在平面上的投影為四邊形或六邊形。



(3)(4) ○：由下圖知 $\overline{AB}=6\sin\theta+6\cos\theta$ ，$0°\le\theta\le 90°$ ，
投影的矩形面積為 $(6\sin\theta+6\cos\theta)\times 6$
$\Rightarrow 36(\sin\theta+\cos\theta)=36\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$ ，
可知矩形最小面積為 36，矩形最大面積為 $36\sqrt{2}$ 。



(5) ○：若影子為正六邊形 $ABCDEF$，
則 $\overline{AC}$ 為正立方體一面的對角線，即 $\overline{AC}=6\sqrt{2}$ ，
則 $\overline{AB}=2\sqrt{6}$ ，可得正六邊形面積為
$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{6})^2\times 6=36\sqrt{3}$ 。

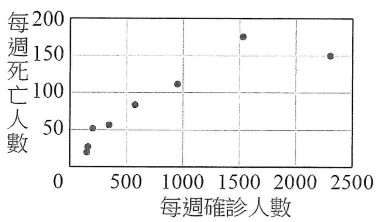


故選(3)(4)(5)。

7. (1) ○：$a_n=a_1\times 2^{n-1}=2\times 2^{n-1}=2^n$，$n$ 為自然數。
(2) ○：$a_n=2^n$，$b_n=5^n$，a_n , b_n 兩數列不存在相同的項。
(3) ×：$a_{30}=2^{30}=(2^6)^5=64^5$，
$b_{15}=5^{15}=(5^3)^5=125^5$，
可知 $a_{30}<b_{15}$。
(4) ×：$a_{30}=2^{30}$ 且 $5^n<2^{30}<5^{n+1}$ 同取 log 可得
$\log 5^n<\log 2^{30}<\log 5^{n+1}$
$\Rightarrow 0.6990\,n<30\times(0.3010)<0.6990\times(n+1)$
$\Rightarrow n<12.9\cdots<n+1$，則 n 為 12，
即 $a_{30}=c_{12+30}=c_{42}$。
(5) ○：$a_{20}=2^{20}$，$a_{30}=2^{30}$ 且 $2^{20}<5^n<2^{30}$，
同取 log 可得 $\log 2^{20}<\log 5^n<\log 2^{30}$
$\Rightarrow 0.3010\times 20<n(0.6990)<0.3010\times 30$
$\Rightarrow 8.61\cdots<n<12.9\cdots$，則 n 可為 9 , 10 , 11 , 12，
即自 a_{20} 至 a_{30} 含有 b_9 , b_{10} , b_{11} , b_{12}，
則 $h=10+4=14$。

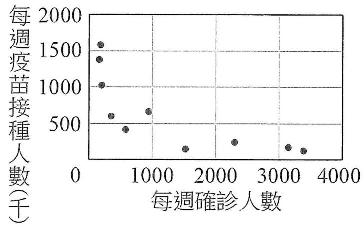
故選(1)(2)(5)。

8. (1) ×：由圖表可知確診人數最高為 5/17 至 5/23，
該周的死亡人數並非最高。
(2) ○：由表知此 10 週間，疫苗總人數低於 700 萬人，
所以每日平均接種人數低於 10 萬人。
(3) ○：由下圖(一)可知 5/31 至 7/25 確診人數降低，
呈正相關。



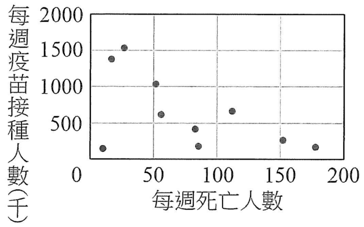
圖(一)

(4) ○：由下圖(二)可知確診人數降低，
疫苗接種人數有升高趨勢。



圖(二)

(5) ○：由下圖(三)可知死亡人數降低，
疫苗接種人數有升高趨勢。

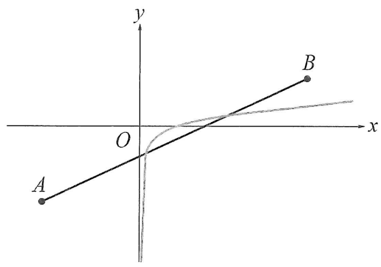


圖(三)

故選(2)(3)(4)(5)。

三、選填題

9. 原式 $f(x)=\sqrt{(x-(-4))^2+(\log x-(-3))^2}+\sqrt{(x-7)^2+(\log x-2)^2}$ ，
可以視為 $y=\log x$ 圖型上的任意點 $P(x,y)$ 與 $A(-4,-3)$，
$B(7,2)$ 兩點的距離和，距離和最小值發生於 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{AB}$
時，由下圖知 $y=\log x$ 圖型與線段 $\overline{AB}$ ，有兩個相異交點，
故有二個 x 值，使 $f(x)$ 產生最小值。



10. $\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{n^2+n}}<a_n<\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\Rightarrow \dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^2+n}}<a_n<\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^2+1}}$

$\Rightarrow \dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{a_n}{2n}<\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n\sqrt{n^2+1}}$

$\Rightarrow \dfrac{n+1}{4\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{a_n}{2n}<\dfrac{n+1}{4\sqrt{n^2+1}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{4\sqrt{n^2+n}}<\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2n}<\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{4\sqrt{n^2+1}}$ ，

因為 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{4\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{4\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{4}$ ，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{4\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{4\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\dfrac{1}{4}$ ，

所以由夾擠定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2n}=\dfrac{1}{4}$ 。

11. 因為 $Z_1+Z_2+Z_3=0 \Rightarrow \dfrac{Z_1+Z_2+Z_3}{3}=0$，

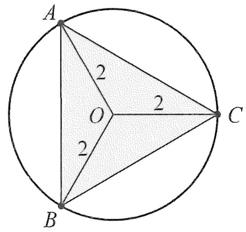
所以△ABC 的重心為複數平面上的原點 O，

又 $|Z_1|=|Z_2|=|Z_3|=2$，

即 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 故 O 亦為△ABC 的外心，

因此△ABC 為正三角形，如圖所示，

$\triangle ABC=(\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin\dfrac{2\pi}{3})\times 3=3\sqrt{3}$。



第貳部分、混合題或非選擇題

12. 如圖所示，△OPS 中，

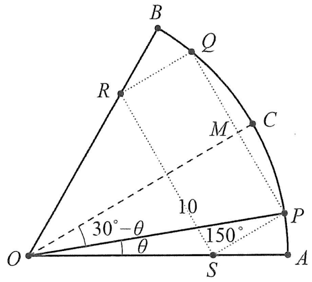
$\angle POS=\theta$、$\angle PSO=150°$，

由正弦定理定理可得

$\dfrac{\overline{PS}}{\sin\theta}=\dfrac{10}{\sin 150°}$

$\Rightarrow \overline{PS}=\dfrac{10}{\frac{1}{2}}\times\sin\theta=20\sin\theta$，

故選(4)。



13. 因為 $\overline{PQ}=2\overline{PM}$，

且 $\overline{PM}=10\sin(30°-\theta)=10(\dfrac{1}{2}\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta)$，

所以 $\overline{PQ}=2\times 10(\dfrac{1}{2}\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta)=10\cos\theta-10\sqrt{3}\sin\theta$，

又由題意知 $\overline{PQ}=\sqrt{3}\,\overline{PS} \Rightarrow 10\cos\theta-10\sqrt{3}\sin\theta=20\sqrt{3}\sin\theta$

$\Rightarrow 10\cos\theta=30\sqrt{3}\sin\theta \Rightarrow \tan\theta=\dfrac{10}{30\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$。

14. 矩形 $PQRS$ 的面積

$=\overline{PS}\times\overline{PQ}=20\sin\theta\times(10\cos\theta-10\sqrt{3}\sin\theta)$

$=200\sin\theta\cos\theta-200\sqrt{3}\sin^2\theta$

$=100\sin 2\theta-100\sqrt{3}(1-\cos 2\theta)$

$=100\sin 2\theta+100\sqrt{3}\cos 2\theta-100\sqrt{3}$

$=200\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{3})-100\sqrt{3}$。(3 分)

因為 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \dfrac{\pi}{3}\le 2\theta+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{2\pi}{3}$，

所以當 $\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{3})=1$ 即 $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ 時，

$PQRS$ 的面積有最大值為 $200-100\sqrt{3}$。(3 分)

15. 設橢圓半長軸長為 a，半短軸長為 b，

因為 $a^2=25$，$b^2=9$，所以 $c^2=a^2-b^2=16$，故 $\overline{F_1F_2}=2c=8$。

△PF_1F_2 中，$\overline{F_1F_2}^2=\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-2\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}\times\cos 60°$ (2 分)

$\Rightarrow 64=\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}$

$=\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2+2\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}-3\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}$

$=(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})^2-3\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=10^2-3\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}$

$\Rightarrow 64=10^2-3\overline{PF_1}\times\overline{PF_2} \Rightarrow \overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=12$。(2 分)

16. △F_1PF_2 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}\times\sin 60°$

$=\dfrac{1}{2}\times 12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$。(2 分)

17. 已知橢圓 Γ 旋轉 45° 所對應的旋轉矩陣

$R=\begin{bmatrix}\cos 45° & -\sin 45°\\ \sin 45° & \cos 45°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ (2 分)

設 Γ 上 $P(r,s)$ 旋轉後所對應的點為 $Q(x,y)$，

即 $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}r\\ s\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}r\\ s\end{bmatrix}=R^{-1}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\end{bmatrix}$。(1 分)

因為 $\dfrac{r^2}{25}+\dfrac{s^2}{9}=1$，

所以 $\dfrac{[\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)]^2}{25}+\dfrac{[\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)]^2}{9}=1$，(2 分)

展開整理得 $17x^2-16xy+17y^2-225=0$。(1 分)