

110 學年度全國高級中學分科測驗第六次模擬考數學甲(110-E6)



第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

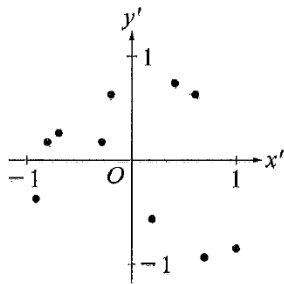
一、單選題(占 12 分)

- 已知坐標平面上橢圓 $\Gamma: 4x^2 + y^2 = 1$ ，現將 Γ 以原點為中心旋轉得到 Γ' ，且使得 Γ' 的長軸頂點落在直線 $x + y = 0$ 上，則 Γ' 的方程式為下列哪一個選項？
 - $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 2$
 - $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 2$
 - $5x^2 + 6xy - 5y^2 = 2$
 - $5y^2 + 6xy - 5x^2 = 2$
 - $5y^2 - 6xy - 5x^2 = 2$
- 若複數 z 在複數平面上的主幅角為 247° ，則 $-\frac{\bar{z}}{247}$ 的主幅角為多少度？
 - 359°
 - 314°
 - 293°
 - 247°
 - 113°

二、多選題(占 40 分)

- 設有 10 筆二維數據 (x_i, y_i) ， $i = 1, 2, \dots, 10$ ，經標準化後的數據為 (x'_i, y'_i) ， $i = 1, 2, \dots, 10$ ，則下列哪些選項是正確的？
 - x' 的平均數為 1
 - x, y 的相關係數與 x', y' 的相關係數不同
 - 若 $x_i < y_i$ ，則 $x'_i < y'_i$ ($i = 1, 2, \dots, 10$)
 - $\sum_{i=1}^{10} (x'_i)^2 = \sum_{i=1}^{10} (y'_i)^2$

(5)



上圖可能為 y' 對 x' 的散布圖

- 已知實係數三次多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 有極大個與極小值， $f(x)$ 除以其導函數 $f'(x)$ 的餘式為 $r(x)$ ，則下列哪些選項是正確的？
 - $y = r(x)$ 的圖形通過 $y = f(x)$ 的兩極值點(指函數圖形上發生極值之點)
 - 若 $a > 0$ ，則直線 $y = r(x)$ 的一次項係數為正
 - $f\left(-\frac{b}{3a}\right) = r\left(-\frac{b}{3a}\right)$
 - $y = r(x)$ 可能為函數 $f(x)$ 在 $x = -\frac{b}{3a}$ 附近的一次近似
 - $f\left(-\frac{b}{3a} + x\right) + f\left(-\frac{b}{3a} - x\right) = 2f\left(-\frac{b}{3a}\right)$
- 三人一起玩剪刀石頭布猜拳遊戲，落敗方淘汰出局，獲勝方繼續猜拳，直到只剩一人時猜拳遊戲就結束。每玩一次猜拳就算一回，即使無法分出勝負也算一回，則下列哪些選項是正確的？
 - 第一回猜拳後，只有一位獲勝者的機率為 $\frac{1}{9}$
 - 第一回猜拳後，恰有二位獲勝者的機率為 $\frac{1}{3}$
 - 第一回猜拳後，無人淘汰的機率為 $\frac{2}{9}$
 - 第二回猜拳後，遊戲就結束的機率為 $\frac{1}{3}$
 - 直到第三回猜拳後才淘汰第一人，且在第五回猜拳後遊戲就結束的機率為 $\frac{2}{243}$

6. 在坐標空間中的 xy 平面上有一個拋物線 $\Gamma: y^2 - ax - a = 0$ ，其焦點 F 為原點。令 P 為拋物線 Γ 上一動點及平面 $E: 4x + 2y + \sqrt{5}z + 10 = 0$ ，則下列哪些選項是正確的？
 (1) 在坐標空間中， Γ 的頂點坐標為 $(-1, 0, 0)$ (2) 在坐標空間中， Γ 的準線垂直 xz 平面
 (3) $a = 1$ (4) P 點到平面 E 的最近距離為 5
 (5) 當 P 點到平面 E 的距離為最近時， P 點的空間坐標為 $P(-\frac{3}{4}, -1, 0)$
7. 設 $f(x)$ 為整係數三次多項式， $i = \sqrt{-1}$ 為方程式 $f(x) = 0$ 的一根，試問下列哪些選項是正確的？
 (1) $f(i^3) = 0$ (2) $f(x)$ 的係數和為偶數 (3) 有實數 x 滿足 $f(x^2) = 0$
 (4) 若 $f(1) > 0, f(2) < 0$ ，則 $f(3) < 0$
 (5) 若 $f(1) > 0, f(2) < 0$ ，則方程式 $f(x-1) = 0$ 在 0 與 1 之間有實根

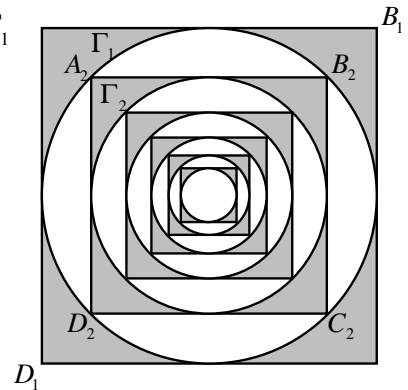
三、選填題 (占 24 分)

8. 在坐標平面上，已知 \vec{a}, \vec{b} 所張成的三角形面積為 5， \vec{b}, \vec{c} 所張成的平行四邊形面積為 20，若 $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}$ ，則正數 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 設 x 為實數，且 $3^{x^2} = 2^{\log_3 2}$ ，則 $3^x = \underline{\hspace{1cm}}$ 或 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。(化為最簡分數)

10. 方程組 $\begin{cases} y = mx + 3m \\ y = \sqrt{8 - x^2} \end{cases}$ 有實數解，則 m 值的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式)

11. 如右圖，先作邊長為 2 的正方形 $A_1B_1C_1D_1$ ，再作其內切圓 Γ_1 ；接著作 Γ_1 的內接正方形 $A_2B_2C_2D_2$ ，再作其內切圓 Γ_2 ；……，如此繼續下去，則右圖中無限多個灰色區域的面積總和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

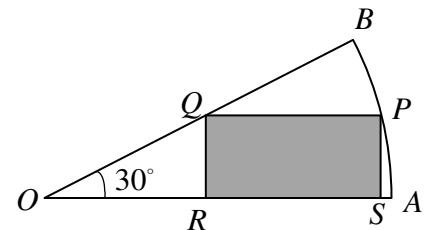


第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-13 題為題組

如右圖，扇形 OAB 的半徑為 $\sqrt{2}$ ，圓心角為 30° ，若動點 P 在弧 \widehat{AB} 上移動，矩形 $PQRS$ 為扇形 OAB 的內接四邊形，試回答下列問題：

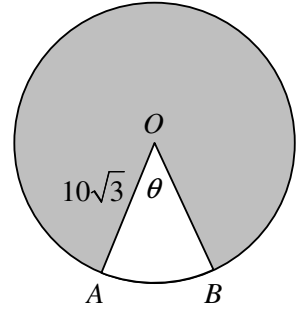
12. 矩形 $PQRS$ 的最大面積為何？ (9 分)



13. 矩形 $PQRS$ 有最大面積時，此時 $\angle AOP$ 的大小為何？ (3 分)

14-17 題為題組

小杏有一個半徑為 $10\sqrt{3}$ 公分的圓形紙張，想在圓形紙張上割去圓心角為 θ 的扇形 AOB ，剩下的紙張圍成一個圓錐形帽子 Ω ，準備在耶誕節時戴頭上。小杏想要知道：當圓心角 θ 為多大時，帽子 Ω 的體積 V 會最大。試回答下列問題：



14. 令圓錐形帽子 Ω 的高為 h ，底圓半徑為 r ，則 h 與 r 的關係式為下列何者？

(單選題，2分)

- (1) $h+r=10\sqrt{3}$ (2) $h-r=10\sqrt{3}$ (3) $h^2+r^2=10\sqrt{3}$ (4) $h^2+r^2=300$
(5) $h^2-r^2=300$

15. 若用 h 表示圓錐形帽子的體積 $V(h)$ ，則 $V(h)$ 為下列何者？ (單選題，2分)

- (1) $\pi(300h-h^3)$ (2) $\pi(h^3-300h)$ (3) $\frac{1}{3}\pi(300h^2-h^3)$ (4) $\frac{1}{3}\pi(300h-h^3)$
(5) $\frac{1}{3}\pi(h^3-300h^2)$

16. 試求圓錐形帽子體積 $V(h)$ 的最大值。 (5分)

17. 當圓錐形帽子體積 $V(h)$ 有最大值時，割去的扇形 AOB 其圓心角 θ 為何？ (3分)

**RA6103 110 學年度全國高級中學分科測驗第六次模擬考
數學甲(110-E6)**

數學甲參考答案

選擇題：1.(1) 2.(3) 3.(4) 4.(1)(3)(5) 5.(2)(4)(5) 6.(1)(2)(5) 7.(1)(2)(4)

選填題：8. 2 9. 2 或 $\frac{1}{2}$ 10. $0 \leq m \leq 2\sqrt{2}$ 11. $8 - 2\pi$

混合題或非選擇題：12. $2 - \sqrt{3}$ 13. 15°

14.(4) 15.(4) 16. $\frac{2000\pi}{3}$ 立方公分 17. $\left(2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\pi$