

數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(1)	(3)	(4)	(1)(3)(5)	(2)(4)(5)	(1)(2)(5)	(1)(2)(4)

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

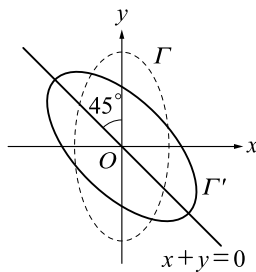
1. (1)

出處：選修數學甲〈二次曲線〉

目標：橢圓旋轉後的方程式

解析：橢圓 Γ 的標準式為 $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} = 1$ ，長軸在 y 軸上

由下圖可知將 Γ 逆時針旋轉 45° 後得到 Γ'



在 Γ' 上取一點 $P'(x', y')$

設 $P'(x', y')$ 順時針旋轉 45° 後得到 $P(x, y)$

$$\Rightarrow P = R_{(-45^\circ)} P'$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{y'-x'}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

代入 $4x^2 + y^2 = 1$

$$\Rightarrow 4 \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{y'-x'}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1$$

展開整理得 $5(x')^2 + 6x'y' + 5(y')^2 = 2$ ，

即 $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 2$ ，故選(1)。

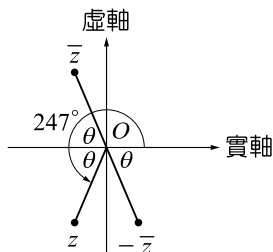
2. (3)

出處：選修數學甲〈複數與多項式方程式〉

目標：複數的極式

$$\text{解析：} -\frac{\bar{z}}{247} = \frac{-\bar{z}}{247}$$

如下圖所示， $\theta = 247^\circ - 180^\circ = 67^\circ$



則 $-\bar{z}$ 的主幅角為 $360^\circ - \theta = 360^\circ - 67^\circ = 293^\circ$

又複數伸縮倍數為正時不影響主幅角

所以 $-\frac{\bar{z}}{247}$ 的主幅角亦為 293°

故選(3)。

二、多選題

3. (4)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：數據標準化、散布圖、相關係數

解析：(1) \times ： x' 的平均數為 0

(2) \times ：將數據標準化，不會改變相關係數，故相關係數相同

(3) \times ：反例：取 $y_i = 2x_i$ ，且 x_i 皆為正數，符合 $x_i < y_i$ 則 x, y 為完全正相關，所以相關係數 $r = 1 \Rightarrow x', y'$ 的相關係數 $r' = 1$ ，且最適直線為 $y' = x'$

故點 (x'_i, y'_i) 都在 $y' = x'$ 上，故 $x'_i = y'_i$

$$(4) \circ : \sigma_{x'} = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x'_i)^2 - 0^2} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} (x'_i)^2 = 10$$

同理可得 $\sum_{i=1}^{10} (y'_i)^2 = 10$ ，故 $\sum_{i=1}^{10} (x'_i)^2 = \sum_{i=1}^{10} (y'_i)^2$

(5) \times ：散布圖中每一個點的坐標都介於 -1 與 1 之間不可能滿足 $\sum_{i=1}^{10} (x'_i)^2 = 10$ 且 $\sum_{i=1}^{10} (y'_i)^2 = 10$

故不可能為 y' 對 x' 的散布圖

故選(4)。

4. (1)(3)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉、選修數學甲〈微分〉

目標：由極值存在看導數

解析：(1) \circ ：設兩極值點為 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$

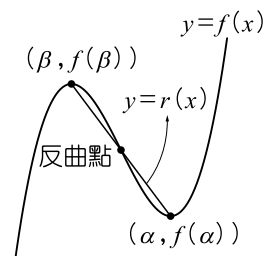
$$\Rightarrow f'(\alpha) = 0, f'(\beta) = 0$$

$f(x) = f'(x)q(x) + r(x)$ ，其中 $q(x)$ 為商式

令 $x = \alpha, \beta$ 代入，得 $f(\alpha) = r(\alpha), f(\beta) = r(\beta)$

即 $y = r(x)$ 的圖形通過兩極值點

(2) \times ：由下圖可知直線 $y = r(x)$ 的斜率為負



$\Rightarrow y = r(x)$ 的一次項係數為負

(3) \circ ： \because 三次函數 $y = f(x)$ 的圖形對稱於反曲點

$$\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right) \right)$$

且 $y = r(x)$ 的圖形通過兩極值點

$\therefore y = r(x)$ 的圖形通過反曲點

$$\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right) \right)$$

$$\Rightarrow r\left(-\frac{b}{3a}\right) = f\left(-\frac{b}{3a}\right)$$

(4) \times ：由上圖可知，直線 $y = r(x)$ 不可能為 $y = f(x)$ 的函數圖形通過反曲點的切線(即一次近似)

(5) \circ ：令 $y = f(x)$ 的函數圖形上兩點

$$P\left(-\frac{b}{3a}+x, f\left(-\frac{b}{3a}+x\right)\right),$$

$$Q\left(-\frac{b}{3a}-x, f\left(-\frac{b}{3a}-x\right)\right)$$

$$\therefore \frac{\left(-\frac{b}{3a}+x\right)+\left(-\frac{b}{3a}-x\right)}{2} = -\frac{b}{3a}$$

$\therefore \overline{PQ}$ 中點的 x 坐標為反曲點的 x 坐標
故 \overline{PQ} 中點的 y 坐標為反曲點的 y 坐標，
即 $f\left(-\frac{b}{3a}+x\right) + f\left(-\frac{b}{3a}-x\right) = 2f\left(-\frac{b}{3a}\right)$

故選(1)(3)(5)。

5. (2)(4)(5)

出處：第四冊〈機率〉

目標：獨立事件

解析：三人一起玩剪刀石頭布猜拳遊戲，猜一次拳有以下三種可能：

$$\textcircled{1} P(\text{恰一人勝}) = \frac{C_1^3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3};$$

$$\textcircled{2} P(\text{恰兩人勝}) = \frac{C_2^3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3};$$

$$\textcircled{3} P(\text{無法分出勝負}) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

兩人一起玩剪刀石頭布猜拳遊戲，猜一次拳有以下兩種可能：

$$\textcircled{4} P(\text{恰一人勝}) = \frac{C_1^2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3};$$

$$\textcircled{5} P(\text{無法分出勝負}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$(1) \times : \text{所求機率為 } \frac{1}{3}$$

$$(2) \circ : \text{所求機率為 } \frac{1}{3}$$

$$(3) \times : \text{所求機率為 } \frac{1}{3}$$

(4) \circ : 第二回猜拳後遊戲就結束，人數變化有以下兩種可能：

(三人) \rightarrow (一人) 或 (兩人) \rightarrow (一人)

$$\text{故所求機率為 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(5) \circ : 第三回猜拳後才淘汰第一人，且在第五回猜拳後遊戲結束，人數變化為

(三人) \rightarrow (三人) \rightarrow (兩人) \rightarrow (兩人) \rightarrow (一人)

$$\text{故所求機率為 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{243}$$

故選(2)(4)(5)。

6. (1)(2)(5)

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉、

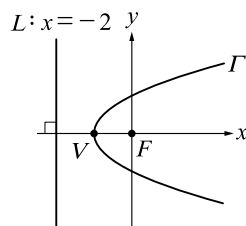
選修數學甲〈二次曲線〉

目標：點到平面的距離公式、拋物線的標準式

解析：(1) \circ : 拋物線 $\Gamma: y^2 - ax - a = 0 \Rightarrow y^2 = a(x+1)$

故在 xy 平面上的頂點坐標為 $V(-1, 0)$

在坐標空間中的頂點坐標為 $(-1, 0, 0)$



(2) \circ : 準線 L 在 xy 平面上且垂直 x 軸
 \Rightarrow 準線 L 垂直 xz 平面

(3) \times : $c = \sqrt{VF} = 1 \Rightarrow a = 4c = 4$

(4) \times : 設 $P(x, y, 0)$

$$\Rightarrow y^2 = 4(x+1) \Rightarrow 4x = y^2 - 4$$

$$d(P, E) = \frac{|4x + 2y + 0 + 10|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (\sqrt{5})^2}}$$

$$= \frac{|(y^2 - 4) + 2y + 10|}{5}$$

$$= \frac{(y+1)^2 + 5}{5}$$

當 $y = -1$ 時， $d(P, E)$ 有最近距離為 $\frac{5}{5} = 1$

(5) \circ : 承(4)，當 $d(P, E)$ 有最近距離時

將 $y = -1$ 代入 $4x = y^2 - 4$

$$\Rightarrow 4x = 1 - 4 = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

此時 P 點的空間坐標為 $P\left(-\frac{3}{4}, -1, 0\right)$

故選(1)(2)(5)。

7. (1)(2)(4)

出處：選修數學甲〈極限與函數〉、〈複數與多項式方程式〉

目標：勘根定理、虛根成對定理

解析：(1) \circ : $\because i$ 為 $f(x) = 0$ 的一根

$$\therefore -i \text{ 亦為 } f(x) = 0 \text{ 的一根} \Rightarrow f(i^3) = f(-i) = 0$$

(2) \circ : 整係數三次多項式 $f(x)$ 必可分解為

$$f(x) = (x+i)(x-i)(ax+b) = (x^2+1)(ax+b), a, b \text{ 為整數}$$

係數和 $f(1) = 2(a+b)$ 為偶數

(3) \times : 反例：設 $f(x) = (x^2+1)(x+1)$

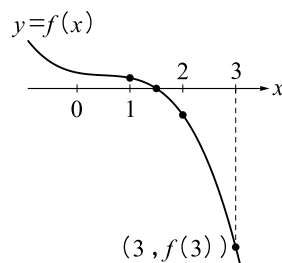
$$\Rightarrow f(x^2) = (x^4+1)(x^2+1) \text{ 恆正，沒有實數 } x \text{ 滿足 } f(x^2) = 0$$

(4) \circ : 若 $f(1) > 0, f(2) < 0$ ，則 $f(x) = 0$ 在 1 與 2 之間有實根

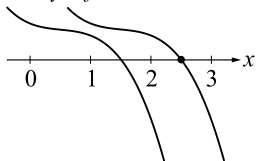
又 $f(x) = 0$ 只有一實根(表 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸只有一個交點)

$\therefore y=f(x)$ 的圖形與 x 軸的交點介於 1 與 2 之間

由下圖可知， $f(3) < 0$



- (5) \times : 方程式 $f(x)=0$ 在 1 與 2 之間恰有一實根
 $\therefore y=f(x)$ 的圖形向右平移 1 單位得 $y=f(x-1)$ 的圖形
 \therefore 方程式 $f(x-1)=0$ 在 2 與 3 之間恰有一實根
 $y=f(x)$ $y=f(x-1)$



故選(1)(2)(4)。

三、選填題

8. 2

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量的線性組合、克拉瑪公式

解析： $x = \frac{\vec{b}, \vec{c} \text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\vec{a}, \vec{b} \text{ 所張成的平行四邊形面積}}$
 $= \frac{20}{2 \cdot 5} = 2$ 。

9. 2 或 $\frac{1}{2}$

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指數、對數方程式

解析：兩邊同取 \log 得 $\log 3^{x^2} = \log 2^{\log_3 2}$

$$\Rightarrow x^2(\log 3) = (\log_3 2)(\log 2)$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{(\log_3 2)(\log 2)}{\log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \log 2$$

$$= \left(\frac{\log 2}{\log 3}\right)^2 = (\log_3 2)^2$$

$$\Rightarrow x = \pm \log_3 2$$

$$\text{若 } x = \log_3 2, \text{ 則 } 3^x = 2;$$

$$\text{若 } x = -\log_3 2 = \log_3 2^{-1}, \text{ 則 } 3^x = 2^{-1} = \frac{1}{2}。$$

[另解]

由對數定義知

$$x^2 = \log_3 2^{\log_3 2} = (\log_3 2)(\log_3 2) = (\log_3 2)^2$$

$$\Rightarrow x = \pm \log_3 2$$

$$\text{若 } x = \log_3 2, \text{ 則 } 3^x = 2;$$

$$\text{若 } x = -\log_3 2 = \log_3 2^{-1} = \log_3 \frac{1}{2}, \text{ 則 } 3^x = \frac{1}{2}。$$

10. $0 \leq m \leq 2\sqrt{2}$

出處：第一冊〈直線與圓〉、選修數學甲〈極限與函數〉

目標：圓與直線的關係、函數圖形

解析：(1) $y = mx + 3m \Rightarrow y = m(x+3)$

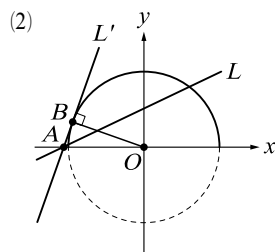
表過點 $A(-3, 0)$ ，斜率為 m 的直線 L

$$y = \sqrt{8-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 8, \text{ 且 } y \geq 0$$

表以原點 $(0, 0)$ 為圓心，半徑 $r = 2\sqrt{2}$ 的上半圓

方程組有實數解，表示直線 L 與上半圓有交點

\Rightarrow 直線 L 介於通過點 $A(-3, 0)$ 的切線 L' 與 x 軸之間(含)



設切線 L' 的切點為 B ， $\overline{AB} = \sqrt{3^2 - 8} = 1$

切線 L' 的斜率為 $\tan \angle OAB = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{8}}{1} = 2\sqrt{2}$ ，

x 軸的斜率為 0

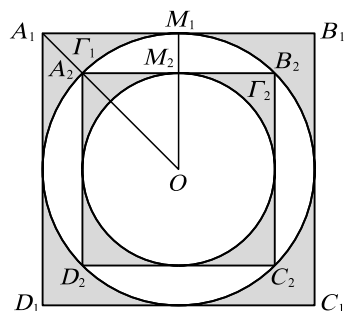
故 $0 \leq m \leq 2\sqrt{2}$ 。

11. $8 - 2\pi$

出處：選修數學甲〈極限與函數〉

目標：無窮等比級數和

解析：將正方形 $A_i B_i C_i D_i$ 與其內切圓 Γ_i 稱為圖形組 Ω_i ，
 $i = 1, 2, 3, \dots$



以圓心 O 為縮放中心將 Ω_1 縮小為 Ω_2

$$\therefore \frac{\Omega_2 \text{ 灰色區域面積}}{\Omega_1 \text{ 灰色區域面積}} = \left(\frac{OM_2}{OM_1}\right)^2 = \left(\frac{OM_2}{OA_2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

可知 Ω_i 的灰色區域面積成等比數列，公比為 $\frac{1}{2}$

Ω_1 的灰色區域面積為 $2^2 - \pi \times 1^2 = 4 - \pi$

故無限多個灰色區域的面積總和為

$$\frac{4 - \pi}{1 - \frac{1}{2}} = 8 - 2\pi。$$

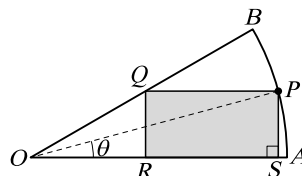
第貳部分、混合題或非選擇題

12. $2 - \sqrt{3}$

出處：第一冊〈數與式〉、第三冊〈三角函數〉

目標：算幾不等式、正餘弦函數的疊合與其極值

解析：



設 $\angle AOP = \theta$

在直角 $\triangle OPS$ 中， $\overline{QR} = \overline{PS} = \sqrt{2} \sin \theta$

在直角 $\triangle OQR$ 中， $\overline{OR} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} \sin \theta = \sqrt{6} \sin \theta$

$\overline{RS} = \overline{OS} - \overline{OR} = \sqrt{2} \cos \theta - \sqrt{6} \sin \theta$

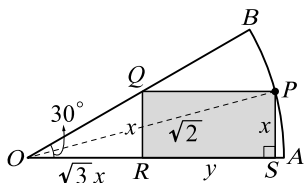
矩形 $PQRS$ 的面積為

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \sin \theta (\sqrt{2} \cos \theta - \sqrt{6} \sin \theta) \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta - 2\sqrt{3} \sin^2 \theta \\ &= \sin 2\theta - 2\sqrt{3} \times \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \sin 2\theta + \sqrt{3} \cos 2\theta - \sqrt{3} \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta \right) - \sqrt{3} \\ &= 2(\sin 2\theta \cos 60^\circ + \cos 2\theta \sin 60^\circ) - \sqrt{3} \\ &= 2 \sin (2\theta + 60^\circ) - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$\because 0^\circ < \theta < 30^\circ$
 $\therefore 60^\circ < 2\theta + 60^\circ < 120^\circ$
 當 $2\theta + 60^\circ = 90^\circ$ 時, $\sin (2\theta + 60^\circ)$ 有最大值為 1
 \therefore 矩形 $PQRS$ 的面積有最大值為 $2 \times 1 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$ 。

[另解]

設 $\overline{PS} = \overline{QR} = x$, $\overline{RS} = y$
 $\Rightarrow \overline{OR} = \sqrt{3}x$, 矩形 $PQRS$ 的面積為 xy

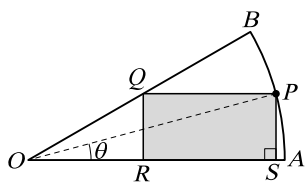


在直角 $\triangle OPS$ 中,

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^2 &= (\sqrt{3}x + y)^2 + x^2 \\ &= 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}xy \\ &\geq 2\sqrt{4x^2y^2} + 2\sqrt{3}xy \\ &= (4 + 2\sqrt{3})xy \\ \Rightarrow xy &\leq \frac{2}{4 + 2\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

\therefore 矩形 $PQRS$ 面積的最大值為 $2 - \sqrt{3}$ 。

◎評分原則



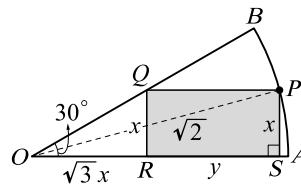
設 $\angle AOP = \theta$

在直角 $\triangle OPS$ 中, $\overline{QR} = \overline{PS} = \sqrt{2} \sin \theta$
 在直角 $\triangle OQR$ 中, $\overline{OR} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} \sin \theta = \sqrt{6} \sin \theta$
 $\overline{RS} = \overline{OS} - \overline{OR} = \sqrt{2} \cos \theta - \sqrt{6} \sin \theta$ (2分)
 矩形 $PQRS$ 的面積為
 $\sqrt{2} \sin \theta (\sqrt{2} \cos \theta - \sqrt{6} \sin \theta)$ (1分)
 $= 2 \sin \theta \cos \theta - 2\sqrt{3} \sin^2 \theta$
 $= \sin 2\theta - 2\sqrt{3} \times \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$
 $= \sin 2\theta + \sqrt{3} \cos 2\theta - \sqrt{3}$ (2分)
 $= 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta \right) - \sqrt{3}$
 $= 2(\sin 2\theta \cos 60^\circ + \cos 2\theta \sin 60^\circ) - \sqrt{3}$
 $= 2 \sin (2\theta + 60^\circ) - \sqrt{3}$ (3分)

$\because 0^\circ < \theta < 30^\circ$
 $\therefore 60^\circ < 2\theta + 60^\circ < 120^\circ$
 當 $2\theta + 60^\circ = 90^\circ$ 時, $\sin (2\theta + 60^\circ)$ 有最大值為 1
 \therefore 矩形 $PQRS$ 的面積有最大值為 $2 \times 1 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$ 。(1分)

[另解]

設 $\overline{PS} = \overline{QR} = x$, $\overline{RS} = y$
 $\Rightarrow \overline{OR} = \sqrt{3}x$, 矩形 $PQRS$ 的面積為 xy (2分)



在直角 $\triangle OPS$ 中,

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^2 &= (\sqrt{3}x + y)^2 + x^2 \\ &= 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}xy \quad (3分) \\ &\geq 2\sqrt{4x^2y^2} + 2\sqrt{3}xy \\ &= (4 + 2\sqrt{3})xy \quad (3分) \\ \Rightarrow xy &\leq \frac{2}{4 + 2\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

\therefore 矩形 $PQRS$ 面積的最大值為 $2 - \sqrt{3}$ 。(1分)

13. 15°

出處：第一冊〈數與式〉、第三冊〈三角函數〉
 目標：算幾不等式、正餘弦函數的疊合與其極值
 解析：承第 12 題, 當 $2\theta + 60^\circ = 90^\circ$ 時,

矩形 $PQRS$ 的面積有最大值
 此時, $\theta = 15^\circ$ 。

[另解]

承第 12 題另解, 由算幾不等式可知,
 等號成立的條件為 $4x^2 = y^2 \Rightarrow 2x = y$
 $\therefore \overline{OS} = \overline{OR} + \overline{RS} = \sqrt{3}x + y$
 $= \sqrt{3}x + 2x = (2 + \sqrt{3})x$
 $\tan \angle AOP = \frac{\overline{PS}}{\overline{OS}} = \frac{x}{(2 + \sqrt{3})x} = 2 - \sqrt{3}$
 $\Rightarrow \angle AOP = 15^\circ$ 。

◎評分原則

承第 12 題, 當 $2\theta + 60^\circ = 90^\circ$ 時, (2分)
 矩形 $PQRS$ 的面積有最大值
 此時, $\theta = 15^\circ$ 。(1分)

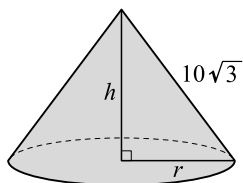
[另解]

承第 12 題另解, 由算幾不等式可知,
 等號成立的條件為 $4x^2 = y^2 \Rightarrow 2x = y$ (1分)
 $\therefore \overline{OS} = \overline{OR} + \overline{RS} = \sqrt{3}x + y$
 $= \sqrt{3}x + 2x = (2 + \sqrt{3})x$ (1分)
 $\tan \angle AOP = \frac{\overline{PS}}{\overline{OS}} = \frac{x}{(2 + \sqrt{3})x} = 2 - \sqrt{3}$
 $\Rightarrow \angle AOP = 15^\circ$ 。(1分)

14. (4)

出處：第四冊〈空間向量〉
 目標：圓錐體體積

解析：由下圖可知， $h^2+r^2=(10\sqrt{3})^2=300$ ，故選(4)。



15. (4)

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：圓錐體體積

$$\begin{aligned} \text{解析：} V(h) &= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(300-h^2)h \\ &= \frac{1}{3}\pi(300h-h^3) \text{ (立方公分)} \end{aligned}$$

故選(4)。

16. $\frac{2000\pi}{3}$ 立方公分

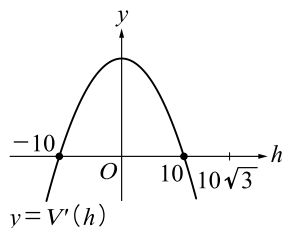
出處：選修數學甲〈微分〉

目標：一階檢定法與最大值求法

$$\text{解析：} V(h) = \frac{1}{3}\pi(300h-h^3), 0 < h < 10\sqrt{3}$$

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(300-3h^2) = \pi(100-h^2)$$

$$\text{令 } V'(h) = 0 \Rightarrow h^2 = 100 \Rightarrow h = 10$$



h	0	10	$10\sqrt{3}$
$V'(h)$	+	-	
增減	↗	↘	

當 $h=10$ 時， $V(h)$ 有最大值

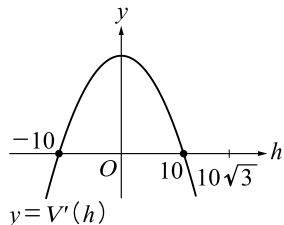
$$V(10) = \frac{1}{3}\pi(300 \times 10 - 10^3) = \frac{2000\pi}{3} \text{ (立方公分)}。$$

◎評分原則

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(300h-h^3), 0 < h < 10\sqrt{3}$$

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(300-3h^2) = \pi(100-h^2) \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{令 } V'(h) = 0 \Rightarrow h^2 = 100 \Rightarrow h = 10 \quad (1 \text{ 分})$$



h	0	10	$10\sqrt{3}$
$V'(h)$	+	-	
增減	↗	↘	

(2 分)

當 $h=10$ 時， $V(h)$ 有最大值

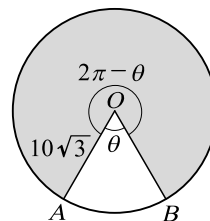
$$V(10) = \frac{1}{3}\pi(300 \times 10 - 10^3) = \frac{2000\pi}{3} \text{ (立方公分)}。 \quad (1 \text{ 分})$$

$$17. \left(2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\pi$$

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：圓心角與扇形面積

解析：將 $h=10$ 代入 $h^2+r^2=300 \Rightarrow r=10\sqrt{2}$

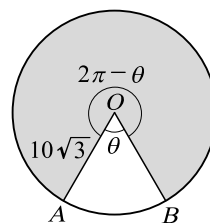


扇形 AOB 的弧長為 $2\pi \times 10\sqrt{2} = 10\sqrt{3} \times (2\pi - \theta)$

$$\Rightarrow \theta = \left(2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\pi。$$

◎評分原則

將 $h=10$ 代入 $h^2+r^2=300 \Rightarrow r=10\sqrt{2}$ (1 分)



扇形 AOB 的弧長為 $2\pi \times 10\sqrt{2} = 10\sqrt{3} \times (2\pi - \theta)$ (1 分)

$$\Rightarrow \theta = \left(2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\pi。 \quad (1 \text{ 分})$$