數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(3)	(4)	(1)	(1)(3)(4)	(2)(4)(5)	(1)(4)	(3)(4)
8.						
(2)(5)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (3)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指數與對數的應用

解析：由題意知 $f(1)=\frac{1}{5}$

$$\therefore \frac{1}{5}=\frac{3^{1-\alpha}}{1+3^{1-\alpha}} \Rightarrow 5\cdot 3^{1-\alpha}=1+3^{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow 3^{1-\alpha}=\frac{1}{4}$$

兩邊取對數得

$$(1-\alpha)\cdot\log 3=\log\frac{1}{4}=-\log 4$$

$$\Rightarrow 1-\alpha=-\frac{\log 4}{\log 3}$$

$$\approx -\frac{0.6020}{0.4771}\approx -1.262$$

$\Rightarrow \alpha\approx 2.262$，最接近 2.3

故選(3)。

2. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：古典機率

解析：若小萱被淘汰，表示跳到第八格，且是由第六格一次往前跳兩格到第八格，因為跳到第七格為獲勝 (遊戲結束)，故不可能從第七格跳到第八格

設跳到第六格需擲出 x 次正面，y 次反面

則 $x+2y=6$，可能的非負整數解為

$$\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases},\ \begin{cases}x=2\\y=2\end{cases},\ \begin{cases}x=4\\y=1\end{cases},\ \begin{cases}x=6\\y=0\end{cases}$$

$\therefore$ 跳到第六格的機率為

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{4!}{2!2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{5!}{4!1!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{6}{16}+\frac{5}{32}+\frac{1}{64}$$

$$=\frac{43}{64}$$

$$\text{跳到第八格的機率}=(\text{跳到第六格的機率})\times\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{擲出反面}}=\frac{43}{128}$$

故選(4)。

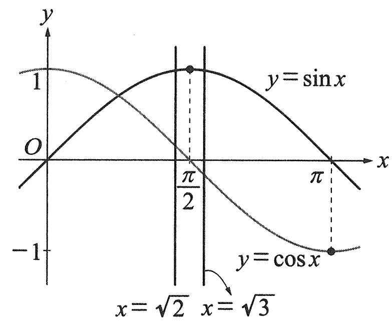
3. (1)

出處：第三冊〈三角函數〉、選修數學甲(下)〈二次曲線〉

目標：三角函數圖形、正餘弦疊合、二次曲線方程式

解析：$\because \sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1.414+1.732=3.146>\pi$

$$\therefore \sqrt{3}-\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}>0\Rightarrow \sqrt{2}\text{ 比 }\sqrt{3}\text{ 更接近 }\frac{\pi}{2}$$



由 $y=\sin x$ 的圖形知

$\sin\sqrt{2}>\sin\sqrt{3}\Rightarrow \sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3}>0$

$\because 0<\sqrt{2}<\sqrt{3}<\pi$ 且 $y=\cos x$ 的圖形在 $(0,\pi)$ 遞減

$\therefore \cos\sqrt{2}>\cos\sqrt{3}\Rightarrow \cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}>0$

可知曲線 Γ 的圖形為一橢圓

又 $(\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3})-(\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3})$

$$=(\cos\sqrt{2}-\sin\sqrt{2})-(\cos\sqrt{3}-\sin\sqrt{3})$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\because 0<\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}<\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}<\pi$$

$$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)>\cos\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore \cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}>\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3}$

因此，曲線 Γ 為焦點在 x 軸上的橢圓

故選(1)。

二、多選題

4. (1)(3)(4)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：資料判讀、二維數據分析

解析：(1) ○：109 年 12 月底 65 歲以上的失智症盛行率為 7.71 %

$$\therefore 7.71\ \%=\frac{292}{65\text{ 歲以上的總人口數}}$$

$$\Rightarrow 65\text{ 歲以上的總人口數}=\frac{292}{0.0771}$$

$$\approx 3787\ (\text{千人})$$

$$=378.7\ (\text{萬人})$$

(2) ╳：155 年到 159 年推估的失智總人口數減少

(3) ○：$\frac{850.9-307.9}{40\times 365}=\frac{543}{14600}$

$$\approx 0.0372\ (\text{千人})$$

$$=37.2\ (\text{人})$$

$$\approx 37\ (\text{人})$$

故平均每天增加約 37 人

(4) ○：由題表中可看出失智總人口數占全國總人口數比每 5 年持續增加，兩者為正相關

故最適直線的斜率為正

(5) ╳：$\frac{6.0-11.3}{50}=\frac{-5.3}{50}$

$$=-0.106\ (\text{千人})$$

$$=-106\ (\text{人})$$

故平均每年約減少 106 人

故選(1)(3)(4)。

5. (2)(4)(5)

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉、
選修數學甲(下)〈機率統計〉

目標：無窮等比級數、幾何分布的概念、二項分布

解析：(1) ╳：兩人猜拳，不分勝負的機率為 $\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$

故恰一人勝出的機率為 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(2) ○：三人猜拳，不分勝負的機率為 $\frac{3+3!}{3^3}=\frac{1}{3}$

(3) ╳：兩人一起猜拳，只有不分勝負 $\left(\text{機率}\frac{1}{3}\right)$ 與恰 1 人勝出 $\left(\text{機率}\frac{2}{3}\right)$ 兩種情況

設隨機變數 Y 為兩人一起猜拳，20 次中恰 1 人勝出的次數

則 $Y\sim B\left(20,\frac{2}{3}\right)$

故所求期望值 $=20\times\frac{2}{3}=\frac{40}{3}>13$

(4) ○：利用樹狀圖

第 1 次　　第 2 次　　第 3 次

不分勝負
- 不分勝負 ── 恰 1 人勝：$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$
- 恰 1 人勝（×）
- 恰 2 人勝 ── 恰 1 人勝：$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$

恰 1 人勝（×）

恰 2 人勝
- 不分勝負 ── 恰 1 人勝：$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$
- 恰 1 人勝（×）

因此，三人一起猜拳，猜到第 3 次才分出勝負的機率為

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{2}{27}$$
$$=\frac{5}{27}$$

(5) ○：

X	1	2	3	4	……
機率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}$	……

$\therefore X$ 的期望值

$$E=1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}+\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{3}E=1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}+\cdots\cdots$$

兩式相減得

$$\frac{2}{3}E=1\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}+\cdots\cdots$$
$$=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots\right]$$
$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$$

$\Rightarrow E=\frac{3}{2}=1.5$ (次)

〈另解〉

由題意知 X 為幾何分布，故 X 的期望值為

$$\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}=1.5\text{ (次)}$$

故選(2)(4)(5)。

6. (1)(4)

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：矩陣的運算、二階線性變換矩陣

解析：(1) ○：設 $O(0,0)$　$\because A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\therefore$ 原點 O 經 A 變換後仍為原點 O

(2) ╳：P 為平面上異於原點 O 的任一點

$\because P$ 經 A^2 變換後仍為 P

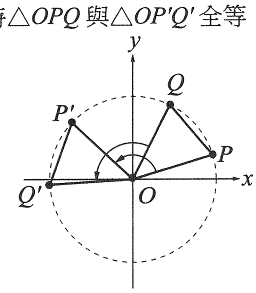
$\therefore A^2=I$

但 A 未必為 I 或 $-I$

A 可能為 $\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$，亦有 $A^2=I$

(3) ╳：A 可能為 $\begin{bmatrix}\cos 120^\circ & -\sin 120^\circ\\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ\end{bmatrix}$

則 P、Q 經 A 變換得 P'、Q'，表示將 P、Q 以原點 O 為圓心，逆時針旋轉 120°，如下圖，此時 $\triangle OPQ$ 與 $\triangle OP'Q'$ 全等



(4) ○：$\because AP=P'$，$AQ=Q'$，且 $AO=O$

G 為 $\triangle OPQ$ 的重心 $\Rightarrow G=\frac{1}{3}(O+P+Q)$

$$\therefore G'=AG=A\cdot\left[\frac{1}{3}(O+P+Q)\right]$$
$$=\frac{1}{3}(AO+AP+AQ)\text{(分配律)}$$
$$=\frac{1}{3}(O+P'+Q')\text{ 為 }\triangle OP'Q'\text{ 的重心}$$

(5) ╳：應為 $\triangle OPQ$ 面積 $=\frac{1}{|\det A|}\times\triangle OP'Q'$ 面積

故選(1)(4)。

7. (3)(4)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線方程式、圓方程式

解析：(1)╳：若以 $\overline{QR}$ 為腰，則 P 點可能在第一象限或第三象限

(2)╳：若以 $\overline{QR}$ 為腰，O 點會落在 $\overline{QR}$ 的中垂線上，但 P 點不一定會落在 $\overline{QR}$ 的中垂線上

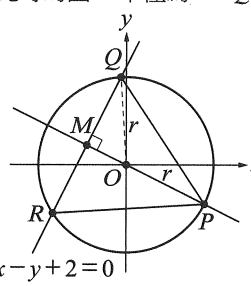
(3)○：$\overline{QR}$ 的中垂線為 $x+2y=0$，

解聯立 $\begin{cases}2x-y+2=0\\x+2y=0\end{cases}$

可得 $\overline{QR}$ 的中點坐標為 $\left(-\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$

(4)○：若△PQR 為正三角形，則 P 點必在 $\overline{QR}$ 的中垂線上

設此時的圓 C 半徑為 r，$\overline{QR}$ 的中點為 M



由點到直線距離公式，

可得 $\overline{OM}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

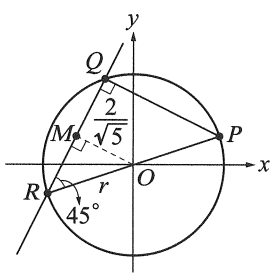
∵△PQR 為正三角形，O 為外心，亦為重心

∴$r=\overline{OP}=2\overline{OM}=\frac{4}{\sqrt{5}}$

因此，此時的圓 C 方程式為 $x^2+y^2=3.2$

(5)╳：若△PQR 為等腰直角三角形，

則 $\angle PQR=90^\circ$ 或 $\angle PRQ=90^\circ$



若 $\angle PQR=90^\circ$，則 $\overline{PR}$ 為直徑

所以 $r=\sqrt{2}\cdot\overline{OM}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

因此，此時的圓 C 方程式為 $x^2+y^2=1.6$

故選(3)(4)。

8. (2)(5)

出處：選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：多項式方程式、複數平面

解析：(1)╳：$x^2+ax+b=0$ 的根為 $x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$

設為 z_1，z_2

$x^2+ax+2b=0$ 的根為 $x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-8b}}{2}$

設為 z_3，z_4

若 z_1，z_2，z_3，z_4 皆為虛根，

則實部皆為 $-\frac{a}{2}$

這樣 z_1，z_2，z_3，z_4 在複數平面上皆在 $x=-\frac{a}{2}$ 的直線上(不合)

(2)○：易知方程式的根不可能為 4 個實根

由(1)知也不是 4 個虛根，且 a，b 為實數

因此方程式的根必為兩實根兩虛根

(3)╳：若 $b<0$，則 $a^2-4b>0$，$a^2-8b>0$

此時方程式有 4 個實根(不合)

(4)╳：承(2)，令 z_1、z_2 為實根，z_3、z_4 為虛根

且 z_1、z_2 和 z_3、z_4 分別在正方形的對角線上

∵正方形邊長為 1

$$\therefore |z_1-z_2|=\sqrt{2}=\left|\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}-\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\right|=\sqrt{a^2-4b}$$

$\Rightarrow a^2-4b=2$ ⋯⋯⋯⋯①

$$|z_3-z_4|=\sqrt{2}=\left|\frac{-a+\sqrt{8b-a^2}\,i}{2}-\frac{-a-\sqrt{8b-a^2}\,i}{2}\right|$$

$(\because a^2-8b<0)$

$$=\left|\sqrt{8b-a^2}\,i\right|=\sqrt{8b-a^2}$$

$\Rightarrow a^2-8b=-2$ ⋯⋯⋯⋯②

由①、②得 $a^2=6$，$b=1$

故 a 可能為負

(5)○：由(4)知 $a=\pm\sqrt{6}$，$b=1$

若 $a=-\sqrt{6}$，$b=1$，則

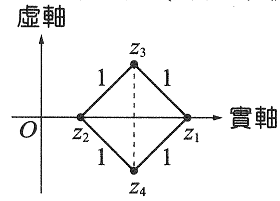
$z_1=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，

$z_2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，

$z_3=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}{2}$，

$z_4=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}$

在複數平面上分布如下圖(其中一種情況)



$$\therefore |z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{6}+2\sqrt{2}$$

故選(2)(5)。

三、選填題

9. -256

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：反曲點的概念、導數的定義

解析：$f'(x)=4x^3+9x^2+2ax$

$f''(x)=12x^2+18x+2a$

$\because(1\,,20)$ 為 $y=f(x)$ 圖形的反曲點

$\therefore f''(1)=30+2a=0\Rightarrow a=-15$

又 $(1\,,20)$ 在 $y=f(x)$ 圖形上

$\therefore 20=1+3+(-15)+b\Rightarrow b=31$

因此，$f(x)=x^4+3x^3-15x^2+31$

由導數的定義

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-2-4h)-f(-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(-4)\cdot\frac{f(-2+(-4h))-f(-2)}{(-4h)}$$

$$=\lim_{(-4h)\to0}(-4)\cdot\frac{f(-2+(-4h))-f(-2)}{(-4h)}$$

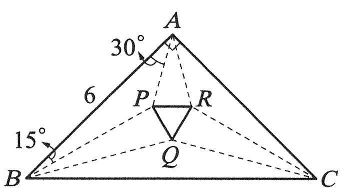
$$=(-4)\cdot f'(-2)=-4\times64=-256。$$

10. 126

出處：第二冊〈三角比〉

目標：正弦定理、餘弦定理

解析：由題圖及題意知



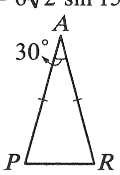
$\angle PAB=30^\circ$，$\angle ABP=15^\circ$，則 $\angle APB=135^\circ$

由正弦定理，$\triangle ABP$ 中

$$\frac{\overline{AP}}{\sin15^\circ}=\frac{6}{\sin135^\circ}=6\sqrt2$$

$\Rightarrow\overline{AP}=6\sqrt2\sin15^\circ$

同理 $\overline{AR}=\overline{AP}=6\sqrt2\sin15^\circ$



由餘弦定理，$\triangle APR$ 中

$$\overline{PR}^2=\overline{AP}^2+\overline{AR}^2-2\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AR}\cdot\cos30^\circ$$

$$=2\,\overline{AP}^2(1-\cos30^\circ)$$

$$=144\cdot\sin^2 15^\circ\cdot(1-\cos30^\circ)$$

$$=72\cdot(1-\cos30^\circ)(1-\cos30^\circ)$$

$$\Rightarrow\overline{PR}=6\sqrt2\cdot(1-\cos30^\circ)$$

$$=6\sqrt2\cdot\frac{2-\sqrt3}{2}$$

$$=6\sqrt2-3\sqrt6$$

$$=\sqrt{72}-\sqrt{54}$$

$\therefore m=72$，$n=54$

故 $m+n=126$。

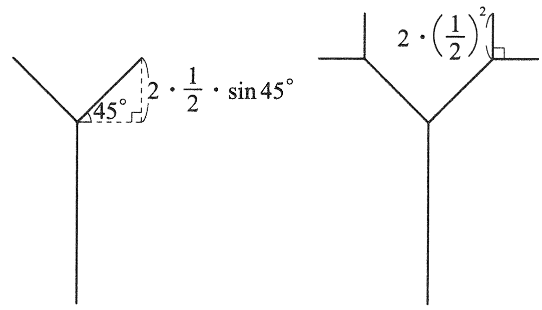
11. $\dfrac{8+2\sqrt2}{3}$

出處：第二冊〈數列與級數〉、選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：無窮等比級數

解析：由圖觀察可知第二層(斜樹枝)的最高點比第一層的最高點多 $2\cdot\frac12\cdot\sin45^\circ$，

第三層(鉛直樹枝)的最高點比第二層的最高點多 $2\cdot\left(\frac12\right)^2$，如下圖



同理可推得，第 n 層的最高點高度

$h_n=h_{\text{鉛直樹枝線段總長}}+h_{\text{斜樹枝的鉛直總長}}$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}h_n=\left[2+2\cdot\left(\frac12\right)^2+2\cdot\left(\frac12\right)^4+\cdots\cdots\right]$$

$$+\left[2\cdot\frac12\cdot\sin45^\circ+2\cdot\left(\frac12\right)^3\cdot\sin45^\circ+\cdots\cdots\right]$$

$$=2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac12\right)^{2k-2}+\sqrt2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac12\right)^{2k-1}$$

$$=2\cdot\frac{1}{1-\frac14}+\sqrt2\cdot\frac{\frac12}{1-\frac14}$$

$$=2\cdot\frac43+\sqrt2\cdot\frac23=\frac{8+2\sqrt2}{3}。$$

〈另解〉

$h_1=2$，$h_2=h_1+\dfrac{2\cdot\frac12}{\sqrt2}$，$h_3=h_2+2\cdot\left(\frac12\right)^2$，

$h_4=h_3+\dfrac{2\cdot\left(\frac12\right)^3}{\sqrt2}$，$h_5=h_4+2\cdot\left(\frac12\right)^4$，……

$$\therefore\begin{cases}h_{2n}=h_{2n-1}+2\cdot\dfrac{\sqrt2}{4^n}\\ h_{2n+1}=h_{2n}+2\cdot\dfrac{1}{4^n}\end{cases}\Rightarrow h_{2n+1}=h_{2n-1}+2\cdot\frac{\sqrt2+1}{4^n}$$

$$\therefore h_{2n-1}=h_1+2(\sqrt2+1)\left(\frac14+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

$$=2+2(\sqrt2+1)\cdot\frac{\frac14\left(1-\left(\frac14\right)^{n-1}\right)}{1-\frac14}$$

$$=2+\frac23(\sqrt2+1)\cdot\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

$$=2+\frac23(\sqrt2+1)\cdot\left(1-\frac{1}{2^{(2n-1)-1}}\right)$$

代入 $h_{2n}=h_{2n-1}+2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4^n}$

得 $h_{2n}=2\cdot\dfrac{4+\sqrt{2}}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^{2n}}\right)$

$$\therefore h_n=\begin{cases}2+\dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\text{，}n\text{ 為奇數}\\ \dfrac{8+2\sqrt{2}}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)\text{，}n\text{ 為偶數}\end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}h_n=\dfrac{8+2\sqrt{2}}{3}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. $x-2y+9z-3=0$

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：平面方程式

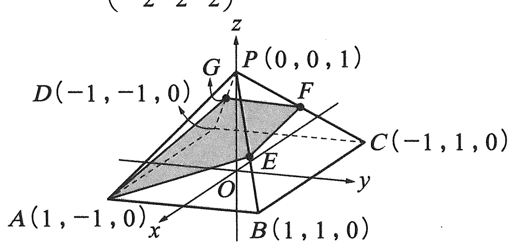
解析：$\because \dfrac{\overline{PE}}{\overline{PB}}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow \overline{PE}:\overline{EB}=3:2$

$\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PC}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \overline{PF}:\overline{FC}=1:1$

由分點公式得 $E\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{5}\right)$，$F\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore \overrightarrow{AE}=\left(-\dfrac{2}{5},\dfrac{8}{5},\dfrac{2}{5}\right)$，

$\overrightarrow{AF}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$



則 $\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AF}=\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{-2}{5},\dfrac{9}{5}\right)/\!/(1,-2,9)$

又過 $A(1,-1,0)$

故平面 AEF 的方程式為 $x-2y+9z-3=0$。

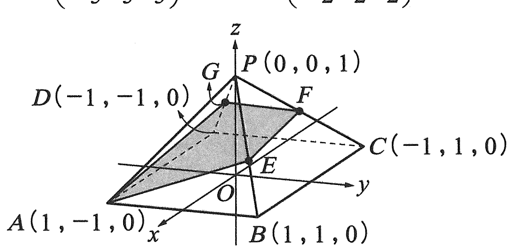
◎評分原則

$\because \dfrac{\overline{PE}}{\overline{PB}}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow \overline{PE}:\overline{EB}=3:2$

$\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PC}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \overline{PF}:\overline{FC}=1:1$

由分點公式得 $E\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{5}\right)$，$F\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore \overrightarrow{AE}=\left(-\dfrac{2}{5},\dfrac{8}{5},\dfrac{2}{5}\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ (2 分)



則 $\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AF}=\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{-2}{5},\dfrac{9}{5}\right)/\!/(1,-2,9)$ (1 分)

又過 $A(1,-1,0)$

故平面 AEF 的方程式為 $x-2y+9z-3=0$。 (1 分)

13. $\left(-\dfrac{3}{4},-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right)$

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：空間中直線方程式

解析：G 為平面 AEF 與直線 PD 之交點

$\overrightarrow{PD}=(-1,-1,-1)$

$\therefore$ 直線 PD 的參數式為 $\begin{cases}x=-t\\ y=-t\\ z=1-t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

代入 $x-2y+9z-3=0$

$\Rightarrow -t+2t+9(1-t)-3=0$

$\Rightarrow t=\dfrac{3}{4}$

$\therefore G\left(-\dfrac{3}{4},-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right)$。

◎評分原則

G 為平面 AEF 與直線 PD 之交點

$\overrightarrow{PD}=(-1,-1,-1)$

$\therefore$ 直線 PD 的參數式為 $\begin{cases}x=-t\\ y=-t\\ z=1-t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$ (1 分)

代入 $x-2y+9z-3=0$

$\Rightarrow -t+2t+9(1-t)-3=0$

$\Rightarrow t=\dfrac{3}{4}$ (1 分)

$\therefore G\left(-\dfrac{3}{4},-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right)$。 (1 分)

14. $\dfrac{9}{20}$

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：空間向量的外積、點到平面的距離

解析：所切割的第一塊小四角錐 $P-AEFG$ 的底面為 $AEFG$，高為 P 到平面 AEF 的距離

$\overrightarrow{AG}=\left(-\dfrac{7}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$

$\therefore \overrightarrow{AG}\times\overrightarrow{AF}=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{4},-\dfrac{9}{4}\right)$

四邊形 $AEFG$ 面積

$=\triangle AEF$ 面積 $+\triangle AFG$ 面積

$=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AF}|+\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AG}\times\overrightarrow{AF}|$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}\sqrt{1^2+(-2)^2+9^2}+\dfrac{1}{4}\sqrt{(-1)^2+2^2+(-9)^2}\right)$

$=\dfrac{9}{40}\sqrt{86}$

高 $=\dfrac{6}{\sqrt{1^2+(-2)^2+9^2}}$

$=\dfrac{6}{\sqrt{86}}$

故所求體積為 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{40}\sqrt{86}\times\dfrac{6}{\sqrt{86}}$

$=\dfrac{9}{20}$。

◎評分原則

> 所切割的第一塊小四角錐 $P-AEFG$ 的底面為 $AEFG$，
> 高為 P 到平面 AEF 的距離
> $\overrightarrow{AG}=\left(-\frac{7}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$
> $\therefore \overrightarrow{AG}\times\overrightarrow{AF}=\left(-\frac{1}{4},\frac{2}{4},-\frac{9}{4}\right)$ (1 分)
> 四邊形 $AEFG$ 面積
> $=\triangle AEF$ 面積 $+\triangle AFG$ 面積
> $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AF}|+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AG}\times\overrightarrow{AF}|$
> $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sqrt{1^2+(-2)^2+9^2}+\frac{1}{4}\sqrt{(-1)^2+2^2+(-9)^2}\right)$
> $=\frac{9}{40}\sqrt{86}$ (2 分)
> 高 $=\frac{6}{\sqrt{1^2+(-2)^2+9^2}}=\frac{6}{\sqrt{86}}$ (1 分)
> 故所求體積為 $\frac{1}{3}\times\frac{9}{40}\sqrt{86}\times\frac{6}{\sqrt{86}}=\frac{9}{20}$ 。 (1 分)

15. (5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：二次函數求值

解析：所求為 $f(0.21)=\frac{3}{7}\times(0.21)^2+\frac{4}{7}\times0.21$
$=0.1389$
$=13.89\ \%$
$\approx 14\ \%$

故選(5)。

16. $\frac{1}{7}$

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

目標：定積分的計算

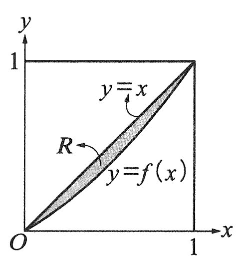
解析：吉尼係數

$=2\times\int_0^1(x-f(x))\,dx$

$=2\times\int_0^1\left(-\frac{3}{7}x^2+\frac{3}{7}x\right)dx$

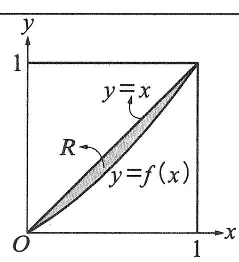
$=\frac{6}{7}\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1$

$=\frac{1}{7}$ 。



◎評分原則

> 吉尼係數
> $=2\times\int_0^1(x-f(x))\,dx$
> $=2\times\int_0^1\left(-\frac{3}{7}x^2+\frac{3}{7}x\right)dx$ (2 分)
> $=\frac{6}{7}\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1$ (1 分)
> $=\frac{1}{7}$ 。 (1 分)



17. $\frac{16\pi}{245}$

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

目標：旋轉體體積(定積分的應用)

解析：所求體積

$V=\int_0^1\pi[x^2-(f(x))^2]\,dx$

$=\int_0^1\pi\left[x^2-\left(\frac{3}{7}x^2+\frac{4}{7}x\right)^2\right]dx$

$=\pi\int_0^1\left(-\frac{9}{49}x^4-\frac{24}{49}x^3+\frac{33}{49}x^2\right)dx$

$=\frac{\pi}{49}\left(-\frac{9}{5}x^5-6x^4+11x^3\right)\Big|_0^1$

$=\frac{\pi}{49}\times\frac{16}{5}=\frac{16\pi}{245}$ 。

◎評分原則

> 所求體積
> $V=\int_0^1\pi[x^2-(f(x))^2]\,dx$
> $=\int_0^1\pi\left[x^2-\left(\frac{3}{7}x^2+\frac{4}{7}x\right)^2\right]dx$ (2 分)
> $=\pi\int_0^1\left(-\frac{9}{49}x^4-\frac{24}{49}x^3+\frac{33}{49}x^2\right)dx$
> $=\frac{\pi}{49}\left(-\frac{9}{5}x^5-6x^4+11x^3\right)\Big|_0^1$ (1 分)
> $=\frac{\pi}{49}\times\frac{16}{5}=\frac{16\pi}{245}$ 。 (1 分)