

臺北區高中 110 學年度第二學期指定科目第二次模擬考

數學甲



第壹部分：選擇題(共占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 平面上，兩條筆直的公路交於原點 $O(0,0)$ ， t 為觀測時間(單位：小時)。當 $t=0$ 時，甲車在其中一條公路上位於點 $A(-30,40)$ (單位：公里)，正以每小時 50 公里的速度，朝原點行駛；同時乙車在另一條公路，位於點 $B(-20,0)$ 以每小時 60 公里的速度朝原點行駛。假設在未來一小時內，兩車前進的方向與速度一直維持不變，且當 $t=a$ 時，甲、乙兩車直線距離最接近，試選出正確的選項。
(1) $0.28 < a < 0.33$ (2) $0.33 < a < 0.38$ (3) $0.38 < a < 0.43$
(4) $0.43 < a < 0.48$ (5) $0.48 < a < 0.53$
2. 設實數函數 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ ，關於函數的極限，試選出正確的選項。
(1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{|x|}$ 存在 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 存在
(4) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^2$ 不存在 (5) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot f(x))$ 不存在
3. 小明的冰箱中有 3 顆相同的巧克力及 3 個相同的布丁，共 6 個點心。小明決定在下星期五天內(星期一到星期五)把點心吃完，從星期一起每天至少吃一個點心，直到冰箱內的巧克力及布丁吃完為止。星期一的第一個點心從冰箱隨機選擇一個點心，吃完後，小明接著再隨機選下一個點心，可繼續吃或等到隔天第一個吃，若選擇隔天再吃，當日就不再吃點心，剩下的點心都採用這個原則；不過，若星期五當天如果還有點心剩下兩個以上，則吃完第一個點心後，剩下的隨機一個一個依序吃完。
例如：三天吃完 \rightarrow

巧	布	巧
---	---	---

布

布	巧
---	---

，或五天吃完 \rightarrow

巧

巧

布

布

布	巧
---	---

。根據這個原則，小明點心吃完不同的順序方法有幾種？
(1) 31 種 (2) 32 種 (3) 160 種 (4) 620 種 (5) 640 種

二、多選題(占 40 分)

4. 已知方程式 $x^3 + x = 2$ 有一個實根、兩個虛根，則 $x^2 + x$ 的值可能是下列哪些選項？
(1) -2 (2) -1 (3) 0 (4) 1 (5) 2
5. 甲準備相同的白球與紅球各 3 顆及兩個箱子，讓玩家乙將所有的球任意分配至兩箱子中，但不能有箱子沒有分配到球(即兩箱皆至少有一顆球)。接著由甲隨機選擇一個箱子，再讓乙從這個箱子裡任意取出一球。假設甲選擇箱子的機率均為 $\frac{1}{2}$ ，乙從箱中取出每一個球的機率皆相等，試選出正確的選項。(注意：下列選項的機率，皆為乙分配後的條件下之條件機率)
(1) 因為紅球占一半，不論乙如何分配，乙拿到紅球機率恆為 $\frac{1}{2}$
(2) 乙的所有分配方法中，乙拿到紅球機率的最高值為 $\frac{7}{10}$
(3) 乙的所有分配方法中，乙拿到紅球機率的最小值為 $\frac{1}{2}$
(4) 乙分配兩箱球數相等，則乙拿到紅球的機率為 $\frac{1}{2}$
(5) 若乙分配兩箱紅球數不相等，則乙從紅球多的箱子取出紅球的機率大於另一箱

6. 已知在 $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} < a < 1$ 時，正實數 x 的方程式 $x^x = a$ 恰有兩個相異正實數解(其中 $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0.69$)

。若正實數 x 滿足指數方程式 $x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$ ，則下列哪些選項可能是 x 的解？

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{16}$ (4) $\frac{1}{64}$ (5) $\frac{1}{256}$

7. 平面上有三點 $P(1, -1)$ 、 $A(-10, -3)$ 、 $B(x, y)$ 與直線 $L: 2x - y = 18$ ，其中點 B 在直線 L 上

。若 \overline{AB} 的中垂線(垂直平分線)會通過 P 點，則點 B 坐標可能是下列哪些選項？

- (1) $(3, -12)$ (2) $(5, -8)$ (3) $(7, -4)$ (4) $(9, 0)$ (5) $(11, 4)$

8. 平面上橢圓 $\Gamma_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的圖形沿著向量 $\vec{v} = (h, k)$ 方向

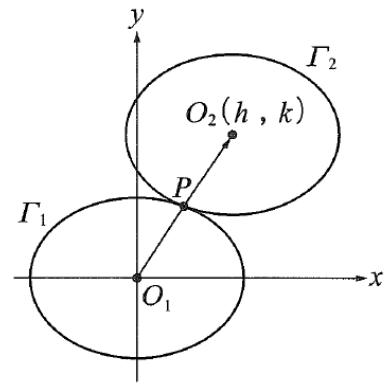
平移，其中 $h > 0$ 、 $k > 0$ 。平移後的橢圓方程式為

$\Gamma_2: \frac{(x-h)^2}{16} + \frac{(y-k)^2}{9} = 1$ ，令 $O_1(0, 0)$ 、 $O_2(h, k)$ 分別為橢圓

Γ_1 、 Γ_2 的中心點。已知兩橢圓圖形恰相交於一點

$P(4\cos\theta, 3\sin\theta)$ 且 P 在兩中心點線段 $\overline{O_1O_2}$ 上，兩中心點

距離為 $\frac{4\sqrt{65}}{5}$ ，如右圖所示，試選出正確的選項。



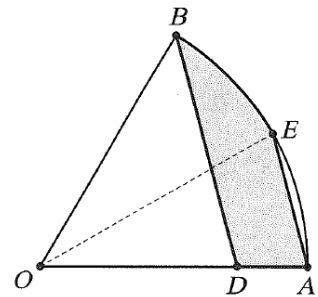
(1) O_2 坐標為 $(8\cos\theta, 6\sin\theta)$ (2) $\overline{PO_1} = \overline{PO_2}$ (3) $\overline{O_1P}$ 與 x 軸正向夾角為 θ

(4) 向量 $(2, 3) // \vec{v}$ (5) 向量 $(7, 11) // \vec{v}$

三、選填題(占 18 分)

9. 令鏡射矩陣 $M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ ，若 M 將坐標平面上的點 $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ 變換至點 $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ，則角 θ 的餘弦值($\cos\theta$)為_____。(化為最簡分數)

10. 平面上有一扇形 AOB 如右圖所示，其中點 D 在 \overline{OA} 上、點 E 在弧 \widehat{AB} 上，半徑 $\overline{OA} = \overline{OE} = \overline{OB} = 2\sqrt{3}$ 、 $\angle AOE = \angle EOB = 30^\circ$ ，且 $\overline{BD} // \overline{AE}$ 。圖中由 \overline{AE} 、 \widehat{EB} 、 \overline{BD} 與 \overline{DA} 圍成的灰色區域面積為_____。(化為最簡根式)



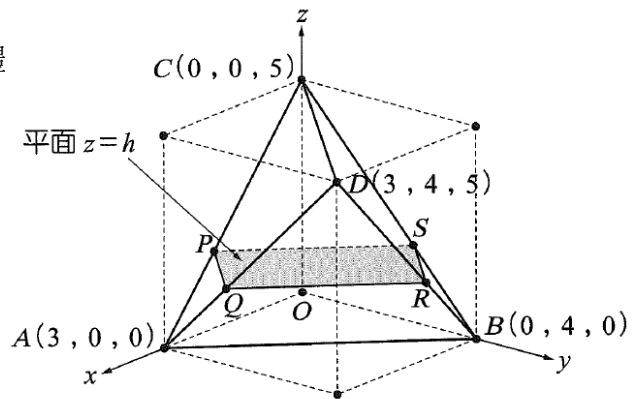
11. 已知 $z_1 = 9 + ai$ ， $z_2 = -6 + bi$ 為兩個相異複數，其中 a, b 為實數， $i = \sqrt{-1}$ 。若

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{5} + \frac{3}{10}i$ ，則 $|z_1| =$ _____。(化為最簡根式)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

空間中有一長方體，其中 4 個頂點 $A(3,0,0)$ 、 $B(0,4,0)$ 、 $C(0,0,5)$ 、 $D(3,4,5)$ 組成一個四面體，且平行 xy 平面的平面 $z=h(0 < h < 5)$ 與此四面體截出一個四邊形 $PQRS$ ，如右圖所示。



12. \vec{AB} 與 \vec{CD} 的夾角餘弦值為何？

(單選題，3 分)

- (1) $-\frac{7}{25}$ (2) $-\frac{3}{5}$ (3) 0 (4) $\frac{3}{5}$ (5) $\frac{7}{25}$

13. 四邊形 $PQRS$ 可能是下列哪些圖形？(多選題，3 分)

- (1) 正方形 (2) 非正方形的矩形 (3) 菱形 (4) 非平行四邊形的梯形
(5) 非菱形的平行四邊形

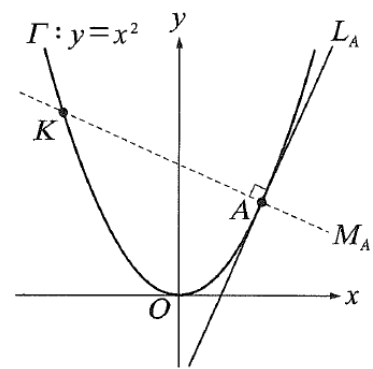
14.(1) 令多項式 $A(h)$ 為平面 $z=h(0 < h < 5)$ 上的四邊形 $PQRS$ 面積，試寫出多項式 $A(h)$

(以 h 的數學式表示)。(非選擇題，3 分)

- (2) 兩平行平面 $z = \frac{5}{3}$ 、 $z = \frac{10}{3}$ 把四面體分割成三個多面體，則中間(以 z 軸的方向區分)多面體的體積是多少？(非選擇題，3 分)

15-17 題為題組

平面上拋物線 $\Gamma: y = x^2$ ，在拋物線上有一點 $A(a, a^2)$ ，其中 $a > 0$ 。令 Γ 上過點 A 的切線為 L_A ，直線 M_A 為通過點 A 且與切線垂直的法線 ($L_A \perp M_A$)，點 $K(k, k^2)$ (其中 $k \neq a$) 為法線 M_A 與拋物線 Γ 異於 A 的交點，如右圖所示：



15. 若 a 為任意正實數，則實數 k 的值可能在下列哪些區間？

(多選題，4)

- (1) $(-\infty, -\sqrt{2})$ (2) $[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$ (3) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
(4) $[\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (5) $(\sqrt{2}, \infty)$

16. 若點 $B(b, b^2)$ (其中 $b \neq k$) 為拋物線上異於 A 的一點，且其法線 L_B 也通過點 K ，則 $ab = ?$

(單選題，3 分)

- (1) $-\frac{1}{4}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{4}$

17. 承 16. 題，若 $\triangle ABK$ 為等腰三角形且 $\overline{AB} = \overline{AK}$ ，則：

- (1) 以 a 的數學式表示 \overline{BK} 的中點坐標。(非選擇題，2 分)
(2) 實數 a^2 之值為何？(非選擇題，3 分)

RA6105 臺北區高中 110 學年度第二學期指定科目第二次
模擬考數學甲 參考答案

選擇題：1. (5) 2. (2) 3. (4) 4. (1)(5) 5. (2)(4) 6. (3)(5) 7. (1)(5) 8. (1)(2)(4)

選填題：9. $\frac{8}{17}$ 10. $\pi - 6 + 3\sqrt{3}$ 11. $\sqrt{1105}$

混合題或非選擇題：12. (5) 13. (3)(5) 14. (1) $\frac{24h(5-h)}{25}$; (2) $\frac{260}{27}$

15. (1)(2) 16. (4) 17. (1) $(-\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a^2})$ (2) $2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$