數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(5)	(2)	(4)	(1)(5)	(2)(4)	(3)(5)	(1)(5)
8.						
(1)(2)(4)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (5)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：利用直線方向向量、參數式求兩點最短距離

解析：甲、乙兩車行駛的方向向量分別 $(30,-40)$、$(60,0)$

假設兩車位置為

甲：$\begin{cases} x=-30+30t \\ y=40-40t \end{cases}$，乙：$\begin{cases} x=-20+60t \\ y=0 \end{cases}$，$0\le t\le 1$

則兩車距離為 $\sqrt{(10+30t)^2+(-40+40t)^2}$

$=\sqrt{2500t^2-2600t+1700}$

$=\sqrt{2500\left(t-\frac{13}{25}\right)^2+1024}$

當 $t=\frac{13}{25}=0.52$ 時，

兩車最接近距離(最小值)為 32 公里，故選(5)。

2. (2)

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：利用左、右極限判斷函數極限是否存在

解析：先求得 $f(x)$、$\frac{x}{|x|}$ 兩函數的的左、右極限：

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=-1$

(1)╳：$f(x)$ 左右極限不相同，極限不存在

(2)○：$f(x)\cdot\frac{x}{|x|}$ 左右極限相同，極限為 -1

(3)╳：左極限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-(-1)}{x}=-\infty$，極限不存在

(4)╳：$(f(x))^2$ 左右極限相同，極限為 1

(5)╳：$x\cdot f(x)$ 左右極限相同，極限為 0

故選(2)。

3. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：計數原理與組合綜合運用

解析：因為從第二個點心開始，都有 2 種選擇，扣除星期五若還剩 2 個點心，則最後一個點心一定要星期五吃，只有一個選擇，再決定 6 個點心哪些要吃巧克力，方法數為 $(2^5-1)\cdot C_3^6=620$ (種)

故選(4)。

二、多選題

4. (1)(5)

出處：選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：利用因式分解解多項式方程式

解析：明顯整數 1 為方程式的實根，

方程式 $x^3+x-2=0$ 可以因式分解為

$(x-1)(x^2+x+2)=0$，

所以當 x 為虛根時，$x^2+x=-2$

當 x 為實根 1 時，$x^2+x=2$

則 x^2+x 有兩個可能值為 ± 2，故選(1)(5)。

5. (2)(4)

出處：第四冊〈機率〉

目標：綜合不同條件計算條件機率

解析：令兩箱中球數較少(或相等)有 r 顆紅球、w 顆白球，其中 $0\le r\le 3$、$0\le w\le 3$、$1\le r+w\le 3$，

則乙取出紅球機率為 $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{r+w}+\frac{3-r}{6-(r+w)}\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{6r}{r+w}-r+(3-r)}{6-(r+w)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{6r}{r+w}+(3-2r)}{6-(r+w)}$

根據 $r+w=1$，2，3 三種可能，

可得乙取出紅球的機率為 $\begin{cases} \frac{3+4r}{10}，r+w=1 \\ \frac{3+r}{8}，r+w=2 \\ \frac{1}{2}，r+w=3 \end{cases}$

當 $r=1$，$w=0$ 時，最大可能值為 $\frac{7}{10}$，

當 $r=0$，$w=1$ 時，最小可能值為 $\frac{3}{10}$

(1)╳：可能會不等於 $\frac{1}{2}$

(2)○：當 $r=1$，$w=0$ 時

(3)╳：當 $r=0$，$w=1$ 時，最小值為 $\frac{3}{10}$

(4)○：當 $r+w=3$ 時

(5)╳：當 $r=1$，$w=0$ 時，紅球少的反而機率高 $\left(1>\frac{2}{5}\right)$

故選(2)(4)。

6. (3)(5)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：利用指數律或觀察選項代入解指數方程式

解析：因為 $(\sqrt[4]{x})^{\sqrt[4]{x}}=(x^{\frac{1}{4}})^{\sqrt[4]{x}}=(x^{\sqrt[4]{x}})^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707$ 在區間 $(0.69,1)$ 內

所以 $\sqrt[4]{x}$ 恰有兩個可能值為 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{4}$，

故指數方程式 $x^{\sqrt[4]{x}}=\frac{1}{4}$ 的可能解為 $\frac{1}{16}$ 或 $\frac{1}{256}$

故選(3)(5)。

〈另解〉

將選項代入：觀察選項可假設 $x=2^{-n}$，

可得 $\sqrt[4]{x}=2^{-\frac{n}{4}}\Rightarrow x^{\sqrt[4]{x}}=(2^{-n})^{(2^{-\frac{n}{4}})}=\frac{1}{4}=2^{-2}$

$\Rightarrow -n\cdot 2^{-\frac{n}{4}}=-2\Rightarrow 2^{-\frac{n}{4}}=\frac{2}{n}$

選項 ($n=1$，2，4，6，8) 代入後只有 $n=4$，8 符合

故選(3)(5)。

7. (1)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：由中垂線觀念轉換成圓與直線求交點

解析：點 P 在 $\overline{AB}$ 的中垂線上 $\Rightarrow \overline{PA}=\overline{PB}$，

代表以 P 為圓心、$\overline{PA}$ 為半徑的圓會過 A、B 兩點，

此圓方程式為 $(x-1)^2+(y+1)^2=125$，

B 點為此圓與直線 L 的交點，

解聯立方程式 $\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=125\\ 2x-y=18\end{cases}$

將直線 $y=2x-18$ 代入圓方程式，

可得 $(x-1)^2+(2x-17)^2=125 \Rightarrow 5(x^2-14x+33)=0$

$\Rightarrow (x-3)(x-11)=0 \Rightarrow x=3$ 或 11，代回直線 L 可得

$(x,y)=(3,-12)$ 或 $(11,4)$ (割線與圓恰有兩交點)

故選(1)(5)。

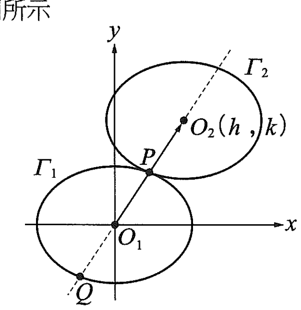
8. (1)(2)(4)

出處：選修數學甲(下)〈二次曲線〉、第三冊〈平面向量〉

目標：橢圓方程式、參數式與向量平行性質運用

解析：令 Q 為 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 與 Γ_1 除了 P 點外的另一個交點，

如下圖所示



(1) ○：因為橢圓的對稱性(O_1 為 $\overline{PQ}$ 的中點)，

可得點 Q 坐標為 $(-4\cos\theta,-3\sin\theta)$，

平移後 Q 點恰平移到點 P，

所以 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{QP}=(8\cos\theta,6\sin\theta)$

故 O_2 坐標為 $(8\cos\theta,6\sin\theta)$

(2) ○：$\overrightarrow{O_1O_2}=2\overrightarrow{O_1P} \Rightarrow P$ 為 $\overline{O_1O_2}$ 的中點

(3) ╳：非零向量 $\overrightarrow{v}=(8\cos\theta,6\sin\theta)$ 與向量

$(\cos\theta,\sin\theta)$ 不平行(其中 $\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$)

(4) ○：$\overline{O_1O_2}=\dfrac{4\sqrt{65}}{5}=2\sqrt{\dfrac{52}{5}} \Rightarrow \overline{O_1P}=\sqrt{\dfrac{52}{5}}$，

即 $16\cos^2\theta+9\sin^2\theta=\dfrac{52}{5}$，

$\Rightarrow 7\cos^2\theta+9=\dfrac{52}{5} \Rightarrow \cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$

可得 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$、$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

所以 $\overrightarrow{v}=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}},\dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)/\!/(2,3)$

(5) ╳：同(4)

故選(1)(2)(4)。

三、選填題

9. $\dfrac{8}{17}$

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：矩陣在平面上線性變換的應用

解析：根據題意 $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$，

可得 $\begin{cases}4\cos\theta-\sin\theta=1\\ 4\sin\theta+\cos\theta=4\end{cases} \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{8}{17}$。

10. $\pi-6+3\sqrt{3}$

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

目標：三角比正弦定理、弧度與度轉換、扇形面積計算

解析：$\angle ODB=\angle OAE=\dfrac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$

$\Rightarrow \angle OBD=180^\circ-60^\circ-75^\circ=45^\circ$

在△OBD 中，由正弦定理知 $\dfrac{\overline{OD}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 75^\circ}$

可得線段長 $\overline{OD}=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=6-2\sqrt{3}$

故灰色區域面積

$=60$ 度扇形面積－△OBD 面積－(30 度扇形面積－△OAE 面積)

$=30$ 度扇形面積－△OBD 面積＋△OAE 面積

$=\dfrac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OD}\cdot\sin 60^\circ$

$+\dfrac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OE}\cdot\sin 30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot(6-2\sqrt{3})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$+\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\pi-6+3\sqrt{3}$。

11. $\sqrt{1105}$

出處：選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：複數乘法計算

解析：考慮等式 $(9+ai)\cdot\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{10}i\right)=-6+bi$ 的實部

可得 $\dfrac{18}{5}-\dfrac{3a}{10}=-6 \Rightarrow a=32$

故 $|z_1|=\sqrt{81+a^2}=\sqrt{1105}$。

第貳部分：混合題或非選擇題

12. (5)

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：坐標化空間向量內積計算夾角餘弦

解析：因為 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,0)$、$\overrightarrow{CD}=(3,4,0)$，

所以兩向量夾角餘弦值為 $\dfrac{(-3,4,0)\cdot(3,4,0)}{25}=\dfrac{7}{25}$

故選(5)。

13. (3)(5)

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間向量平行、垂直判斷

解析：因為 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}=\dfrac{h}{5}\overrightarrow{CD}$ 且 $\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PS}=\dfrac{5-h}{5}\overrightarrow{AB}$

所以 $PQRS$ 為平行四邊形

又因為兩向量 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,0)$，$\overrightarrow{CD}=(3,4,0)$ 不垂直(內積為 7)，所以四個角都不是直角

當 $h=2.5$ 時，四個邊相等為菱形，

其餘情況為非菱形平行四邊形，故選(3)(5)。

14. (1) $\dfrac{24h(5-h)}{25}$；(2) $\dfrac{260}{27}$

出處：第四冊〈空間向量〉、選修數學甲(上)〈積分〉

目標：利用外積或夾角正弦值計算空間平行四邊形面積、三次多項式積分

解析：(1) $A(h)=|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}|$

$$=\frac{h(5-h)}{25}\cdot|(3,4,0)\times(-3,4,0)|$$

$$=\frac{h(5-h)}{25}\cdot\left|\begin{vmatrix}3&4\\-3&4\end{vmatrix}\right|=\frac{24h(5-h)}{25}$$

〈另解〉

承 12. 題，因為 $\cos\angle SPQ=\dfrac{7}{25}$

所以 $\sin\angle SPQ=\dfrac{24}{25}$

故 $A(h)=h\cdot(5-h)\cdot\dfrac{24}{25}=\dfrac{24h(5-h)}{25}$。

(2)所求體積為

$$\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{10}{3}}\frac{24}{25}(5x-x^2)\,dx=\frac{24}{25}\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{5}{3}}^{\frac{10}{3}}=\frac{260}{27}\text{。}$$

◎評分原則

(1) $A(h)=|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}|$ (1 分)

$$=\frac{h(5-h)}{25}\cdot|(3,4,0)\times(-3,4,0)|$$

$$=\frac{h(5-h)}{25}\cdot\left|\begin{vmatrix}3&4\\-3&4\end{vmatrix}\right|=\frac{24h(5-h)}{25}\quad(2\text{ 分})$$

〈另解〉

承 12. 題，因為 $\cos\angle SPQ=\dfrac{7}{25}$

所以 $\sin\angle SPQ=\dfrac{24}{25}$ (1 分)

故 $A(h)=h\cdot(5-h)\cdot\dfrac{24}{25}=\dfrac{24h(5-h)}{25}$。 (2 分)

(2)所求體積為 $\displaystyle\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{10}{3}}\frac{24}{25}(5x-x^2)\,dx$ (1 分)

$$=\frac{24}{25}\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{5}{3}}^{\frac{10}{3}}=\frac{260}{27}\text{。}\quad(2\text{ 分})$$

15. (1)(2)

出處：第一冊〈直線與圓〉、選修數學甲(上)〈微分〉

目標：直線與拋物線求交點、利用算幾不等式解 k 範圍

解析：利用 $y'=2x$ 可知過 A 點的切線斜率 $2a$，

所以法線方程式為 L_A：$y-a^2=-\dfrac{1}{2a}(x-a)$，

與拋物線 $y=x^2$ 解聯立方程式，

將 (x,y) 代入 (k,k^2)，並同除以 $k-a\ (\neq 0)$

可得 $k+a=-\dfrac{1}{2a}\Rightarrow k=-a-\dfrac{1}{2a}\leq-\sqrt{2}$

且當 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 時，$k=-\sqrt{2}$；當 $a\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 時，$k<-\sqrt{2}$

故選(1)(2)。

16. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：兩法線與拋物線交於一點，求兩點 x 坐標的關係式

解析：承 15. 的結論，可推導得 $k=-a-\dfrac{1}{2a}=-b-\dfrac{1}{2b}$

$\Rightarrow a-b=\dfrac{a-b}{2ab}\Rightarrow ab=\dfrac{1}{2}$

故選(4)。

17. (1) $\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4a^2}\right)$；(2) $2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量內積、平行、垂直性質運用

解析：(1)令 $\overline{BK}$ 的中點為 $M\left(\dfrac{b+k}{2},\dfrac{b^2+k^2}{2}\right)$，

因為 $b=\dfrac{1}{2a}$、$k=-a-\dfrac{1}{2a}$

所以 $\begin{cases}b+k=-a\\ b^2+k^2=\dfrac{1}{4a^2}+a^2+1+\dfrac{1}{4a^2}=a^2+1+\dfrac{1}{2a^2}\end{cases}$

可得中點坐標為 $\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4a^2}\right)$。

(2)等腰三角形 ABK 中，$\overline{AM}\perp\overline{BK}$

化簡 $\overrightarrow{KB}=(b-k,b^2-k^2)\,//\,(1,b+k)=(1,-a)$

可得 $\overrightarrow{KB}\perp(a,1)$ (因向量內積 $(1,-a)\cdot(a,1)=0$)

$\Rightarrow\overrightarrow{MA}=\left(\dfrac{3a}{2},\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4a^2}\right)//(a,1)$

$\Rightarrow\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow a^4-4a^2-\dfrac{1}{2}=0$

故 $a^2=2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$。

◎評分原則

(1)令 $\overline{BK}$ 的中點為 $M\left(\dfrac{b+k}{2},\dfrac{b^2+k^2}{2}\right)$，

因為 $b=\dfrac{1}{2a}$、$k=-a-\dfrac{1}{2a}$

所以 $\begin{cases}b+k=-a\\ b^2+k^2=\dfrac{1}{4a^2}+a^2+1+\dfrac{1}{4a^2}=a^2+1+\dfrac{1}{2a^2}\end{cases}$

可得中點坐標為 $\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4a^2}\right)$。 (2 分)

(2)等腰三角形 ABK 中，$\overline{AM}\perp\overline{BK}$

化簡 $\overrightarrow{KB}=(b-k,b^2-k^2)\,//\,(1,b+k)=(1,-a)$

可得 $\overrightarrow{KB}\perp(a,1)$ (因向量內積 $(1,-a)\cdot(a,1)=0$) (1 分)

$\Rightarrow\overrightarrow{MA}=\left(\dfrac{3a}{2},\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4a^2}\right)//(a,1)$

$\Rightarrow\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow a^4-4a^2-\dfrac{1}{2}=0$

故 $a^2=2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$。 (2 分)