全國公私立高級中學 110 學年度分科測驗第七次聯合模擬考

RA6106

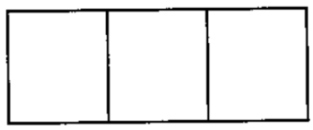
第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 直線 $x-3y=0$ 關於直線 $y+1=0$ 對稱的直線方程式為何？
(1) $3x-y=0$　(2) $3x-y-2=0$　(3) $x+3y+6=0$　(4) $x+3y-6=0$　(5) $x+3y=0$

2. 設圓 $C_1:(x-1)^2+y^2=1$，圓 $C_2:x^2+(y-1)^2=1$，$\Gamma_1:y=2^x$，$\Gamma_2:y=\log_2 x$，已知 Γ_1 和 C_2 交於點 $A(x_1,y_1)$ 和點 $B(x_2,y_2)$，且 $x_1<x_2$；Γ_2 和 C_1，交於點 $C(x_3,y_3)$ 和點 $D(x_4,y_4)$，且 $x_3<x_4$，此時，元太說：$y_1<y_2$ 且 $y_3<y_4$。
步美說：$\overleftrightarrow{AD}$ 和 $\overleftrightarrow{BC}$ 交點的縱坐標與橫坐標會相等。
光彥說：$y_3<y_4<y_1<y_2$。
小哀說：$\overleftrightarrow{AC}$ 和 $\overleftrightarrow{BD}$ 互相平行。
柯南說：圓 C_1 和圓 C_2 交於相異兩點，且此兩點的距離為 $\sqrt{2}$
若上述五個人的說法中，有 k 個人的說法是正確的，而有 m 個人的說法是錯誤的，則 $k-m$ 之值為何？(1) -3　(2) -1　(3) 1　(4) 3　(5) 5

3. 有一街道如圖(1)所示，每個方格都是正方形，小國從 A 往 B，小康從 B 往 A，兩人同時出發，且以相同的速度，沿最短的距離前進。假設在遇到交叉路口時，小國向上的機率是向右的兩倍，小康向左的機率是向下的兩倍，則兩人在途中相遇的機率為何？



圖(1)

(1) $\frac{2}{81}$　(2) $\frac{4}{81}$　(3) $\frac{8}{81}$　(4) $\frac{16}{81}$　(5) $\frac{37}{81}$

二、多選題(占 40 分)

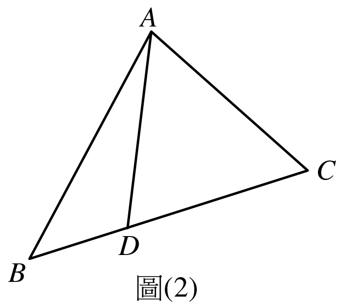
4. 克卜勒第一定律(也稱橢圓定律)是說：每一個行星都沿各自的橢圓軌道繞太陽運行，而太陽則位於橢圓的一個焦點中。因此行星在運行中，有時會距離太陽近一些，有時會遠一些。而距離太陽最近的位置叫做近日點；距離太陽最遠的位置叫做遠日點。阿南為一天文迷，研究天空星體時，發現某行星的近日點與太陽的距離為 6AU(AU 為天文單位)，遠日點與太陽的距離為 20AU，試選出正確的選項。
(1) 此橢圓軌道的長軸長為 26AU　(2) 此橢圓軌道的短軸長為 $2\sqrt{30}$ AU
(3) 此橢圓軌道的兩焦點距離為 14AU
(4) 當某行星的位置與橢圓軌道兩焦點的連線成 60° 的夾角時，則此行星與太陽的距離可能為 16AU
(5) 承(4)，此時該行星的位置與橢圓所形成的三角形之面積為 40AU^2

5. 在數學和電腦科學中，常用來取整數的函數有兩個，一個是下取整函數，以 $[x]$ 表示不大於實數 x 的最大整數，又稱為高斯函數或地板函數；另一個是上取整函數，以 $\lceil x\rceil$ 表示不小於實數 x 的最小整數，又稱為天花板函數。例如：$[3.6]=3$，$\lceil 3.6\rceil=4$，$[-2.6]=-3$，$\lceil -2.6\rceil=-2$。已知 $a=[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots\cdots+[\log 2022]$，
$b=\lceil \log 1\rceil+\lceil \log 2\rceil+\lceil \log 3\rceil+\cdots\cdots+\lceil \log 2022\rceil$，試選出正確的選項。
(1) $\left[\sin\frac{2\pi}{3}\right]-\left[\cos\frac{2\pi}{3}\right]=0$　(2) $\left\lceil\sqrt{2022}\right\rceil=-\left[-\sqrt{2022}\right]$　(3) $[\log 2022]-\lceil \log 2022\rceil=-1$
(4) $b>6999$　(5) $a-b=-2022$

6. 如圖(2)所示，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$D$ 為 $\overline{BC}$ 上的一點，使得 $\angle BAD=\theta$，$\angle CAD=2\theta$，若 $\overline{BD}=t\overline{BC}$，且 $\alpha<t<\beta$，其中 α,β,t 皆為實數，試選出正確的選項。

(1) $t=\dfrac{1}{1-2\cos\theta}$　(2) α 的最大值為 $\dfrac{1}{3}$　(3) β 的最小值為 $\dfrac{1}{2}$

(4) 作 $\angle CAD$ 之角平分線交 $\overline{CD}$ 於 E 點，若 $\overline{DE}=r\overline{BD}$，則 $r=1-2\cos\theta$　(5) 承(4)，$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}$



圖(2)

7. 設 $\omega=\sin\dfrac{\pi}{6}+i\cos\dfrac{\pi}{6}$，$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \omega^2 & \omega^4\\ \omega^2 & \omega^4 & 1\\ \omega^4 & 1 & \omega^2\end{vmatrix}$。試選出正確的選項。

(1) $\omega^3=1$　(2) $\omega^6=1$　(3) $1+\omega+\omega^2=0$　(4) $1+\omega^2+\omega^4=0$　(5) $\Delta=0$

8. 設空間坐標中四個點 $A(7,0,0),B(1,3,0),C(3,0,2)$ 及動點 $P(8\cos\theta,3\sin\theta,9)$，其中 $0\le\theta\le 2\pi$，若平面 ABC 的方程式為 $ax+by+cz=7$，且四面體 P-ABC 的最大體積為 M，最小體積為 m，試選出正確的選項。

(1) $\triangle ABC$ 的面積為 9　(2) $a>b>c$　(3) P 點到平面 ABC 的距離可能為 5

(4) $M=7$　(5) $m=1$

三、選填題（占 18 分）

9. 設 $ABCDEFGH$ 為一個正八邊形，今有一隻青蛙開始在 A 點處，且每次可隨意地跳到相鄰的兩個頂點之一。若這隻青蛙在 6 次內跳到 E 點，則停止跳動；若在 6 次內沒有到達 E 點，則跳完 6 次後，也停止跳動。請問這隻青蛙從開始到停止跳動，可能出現的不同跳法共有__________種。

10.設 O 為原點，$\overrightarrow{OP}=(5\sin\alpha+2\cos\beta,-\sin\alpha+3\cos\beta)$，$0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{6},0\le\beta\le\dfrac{\pi}{4}$，則所有 P 點所形成的區域面積為__________。(化為最簡根式)

11.已知兩顆大小相同的骰子，其中一顆是均勻的，其出現各面的機率相同，另一顆是不均勻的，其出現各面的機率和其點數成正比。今同時擲此兩顆骰子，若兩顆骰子同時出現 k 點，可獲得 k^2 元，則同時擲此兩顆骰子兩次的期望值為________元。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12 至 14 題為題組

在直角坐標平面上，設 O 點為原點，點 A_0 的坐標為 $(40,0)$，已知線性變換矩陣 $T=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{-1}{4}\\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4}\end{bmatrix}$，且 $A_i=TA_{i-1}$，$\triangle OA_{i-1}A_i$ 的面積為 a_i，$i=1,2,3,\cdots,n$，其中 n 為正整數。

試回答下列問題：

12.下列哪些點會出現在第三象限內？(多選題，3 分)

(1) A_3 (2) A_7 (3) A_{16} (4) A_{32} (5) A_{91}

13.試求出△OA_2A_3的面積為何。(非選擇題，3 分)

14.試求出$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$之值為何。(非選擇題，6 分)

15 至 17 題為題組

在物理學中，我們知道位置對時間的變化率是速度，速度對時間的變化率是加速度。所以，速度是加速度的反導函數，位置是速度的反導函數。

在直角坐標平面上，有兩個動點 P 和 Q 分別在 x 軸和 y 軸上移動，已知動點 P 在時刻 t 的速度為 $v(t)=-3$ ，且 $t=0$ 時，動點 P 的坐標為 $(0,0)$ ，而動點 Q 在時刻 t 的速度為 $u(t)=2t+1$ ，且 $t=0$ 時，動點 Q 的坐標為 $(0,-20)$ 。試回答下列問題：

15.P 點在 x 軸上，移動 5 秒後，所停留的坐標為何？ (非選擇題，2 分)

16.若 Q 點往 y 軸的正向移動 k 秒後可到達原點，則 k 之值為何？ (非選擇題，4 分)

17.承(16)，在 Q 點到達原點前，若在 P 點與 Q 點同時移動 s 秒時，兩點的距離會最短，且已知 $m<s<m+1$ ，m 為整數，則 m 之值為何？ (非選擇題，6 分)

RA6106 全國公私立高級中學 **110** 學年度分科測驗第七次聯合模擬考
數學甲參考答案

選擇題：1.(3)　2.(4)　3.(5)　4.(1)(3)(4)　5.(1)(2)(3)　6.(2)(3)　7.(2)(4)(5)　8.(1)(5)

選填題：9.58　10.$\dfrac{17(2-\sqrt{2})}{4}$　11.7

混合題或非選擇題：12.(2)(4)(5)　13.$\dfrac{25}{2}$　14.$\dfrac{800}{3}$

15.$(-15,0)$　16.4　17.3